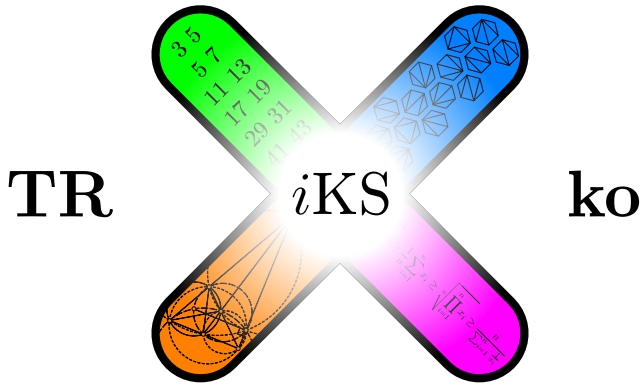


Úloha 1. *Sú dané polynómy* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *a* $Q(x) = x^2 + x + 2001$. *Viete, že polynóm* $P(x)$ *má tri rôzne reálne korene a polynóm* $P(Q(x))$ *nemá žiadne reálne korene. Dokážte, že* $64P(2001) > 1$.

Úloha 2. *Dokážte, že rovnica* $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ *nemá celočíselné riešenia.*

Úloha 3. *Je daný tetivový štvoruholník* $ABCD$ *s opísanou kružnicou* k. *Dotyčnice ku* k *v bodoch* A *resp.* B *pretínajú priamky* BC *resp.* AD *v bodoch* K *a* M *tak, že bod* A *leží na úsečke* DM *a bod* B *na úsečke* CK. *Dokážte, že ak* $|AM| = |AD|$ *a* $|BK| = |BC|$, *potom je* $ABCD$ *lichobežník.*

Úloha 4. *V kruhu stojí* $2n$ *ľudí* ($n \geq 2$) *očíslovaných zaradom od* 1 *do* $2n$, *kde každý človek pozná práve jedného iného (známosti sú vzájomné). Rozhodnite, či je možné rozdeliť ich do dvoch skupín tak, že žiadni dvaja ľudia v jednej skupine sa nepoznajú a každý človek má aspoň jedného suseda, s ktorým nie je v skupine.*

Úloha 5. *Nech* a, b, c *sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 1. Dokážte nerovnosť*

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$