Zadání 3. série

Termín odeslání: 5. říjen 2020

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha C3. Je dán graf s n vrcholy a q hranami, které jsou v nějakém pořadí očíslovány $1, \ldots, q$. Řekneme, že tah[1] v grafu je *rostoucí*, pokud čísla jeho hran tvoří rostoucí posloupnost. Dokažte, že v grafu existuje rostoucí tah tvořený alespoň $\frac{2q}{n}$ hranami.

Úloha N3. Je dána funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $\max\{f(a), b\}$ je násobkem čísla $f(ab)$. Rozhodněte, zdali musí existovat nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $f(k) = 1$.

Úloha A3. Je dáno reálné číslo $1 < t < 2$. Dokažte, že pro každé dostatečně vysoké přirozené číslo n lze zvolit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ tak, že

$$\left|\varepsilon_n t^n + \varepsilon_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 t + \varepsilon_0 - 2020\right| \leq 1.$$

Úloha G3. Budiž ABC ostroúhlý trojúhelník se středem O kružnice opsané a těžištěm G. Nechť je D střed úsečky BC a E bod na kružnici s průměrem BC, který zároveň splňuje $AE \perp BC$. Dále nechť je F průsečík přímek EG, OD a body K, L nechť leží na přímce BC tak, že $FK \parallel OB$, $FL \parallel OC$. Body M, N nechť leží po řadě na přímkách AB, AC tak, že $MK \perp BC$, $NL \perp BC$. Konečně nechť je ω kružnice, která se dotýká přímek OB, OC po řadě v bodech B, C. Dokažte, že kružnice opsaná AMN se dotýká ω.

[1] Tedy taková posloupnost hran, v níž se žádné hrany neopakují a každé dvě po sobě jdoucí sdílí vrchol.