TR *i*KS ko

Úloha 1. *Je daný polynóm* $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$*. Vieme, že rovnice* $p(x) = 1$, $p(x) = 2$ *majú obe* 4 *rôzne reálne korene. Dokážte, že ak korene prvej rovnice spĺňajú* $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ *(v nejakom poradí), tak korene druhej rovnice spĺňajú tú istú rovnosť.*

Úloha 2. *Ákos chce vytvoriť nekonečnú postupnosť prirodzených čísel* $a_1, a_2, \ldots$*. Už má prvých* k *členov* $a_1, \ldots, a_k$*. Ďalšie členy pridáva tak, že* a_n *je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá zapísať ako súčet niekoľkých (aspoň jedného) členov, ktoré sa už v postupnosti vyskytli. Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké* [1] n *platí* $a_{n+1} = 2a_n$*.*

Úloha 3. *Dokážte, že rovnica* $3y^2 = x^4 + x$ *nemá riešenie v kladných celých číslach.*

Úloha 4. *Máme ostrouhlý trojuholník* ABC *s opísanou kružnicou* k*. Nech* M, N *sú stredy kratších oblúkov* AB, AC*. Na priamke* BC *ležia body* P, B, C, Q *v tomto poradí tak, že* $AB = BP$ *a* $AC = CQ$*. Dokážte, že priamky* PM *a* QN *sa pretínajú na kružnici* k*.*

Úloha 5. *Dokážte, že čísla* $1, 2, \ldots, 2020$ *sa dajú zafarbiť, každé namodro alebo načerveno tak, že každá* 18*-členná aritmetická postupnosť vytvorená z týchto čísel obsahuje aj červené aj modré číslo.*

---

[1] Formálne povedané, dokážte, že existuje také N, že pre všetky $n > N$ platí $a_{n+1} = 2a_n$.