

Zadania 4. série

Termín odoslania: 30. 10. 2017

Adresa: KMS – iKS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha N4. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné racionálne čísla x, y platí

$$f(xy)\text{NSD} \left(f(x)f(y), f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right) \right) = xyf\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Úloha A4. Nech n je prirodzené číslo a a_1, a_2, \dots, a_n sú dané reálne čísla so súčtom 0. Nájdite maximum výrazu $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ (v závislosti od a_1, \dots, a_n), ak viete, že x_1, x_2, \dots, x_n sú reálne čísla, pre ktoré platí $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 \leq 1$.

Úloha G4. Nech D, E, F sú päty výšok ostrouhlého trojuholníka ABC postupne z vrcholov A, B, C . Nech P je taký bod na priamke EF , že $|PF| = |DE|$ a F leží medzi E a P . Podobne, nech Q je taký bod na priamke EF , že $|QE| = |DF|$ a E leží medzi F a Q . Označme $X \neq E$ priesečník priamky AC s kružnicou opísanou trojuholníku DPE a $Y \neq F$ priesečník priamky AB s kružnicou opísanou trojuholníku DQF . Dokážte, že stred strany BC leží na priamke XY .

Úloha C4. V rade je $2n - 1$ lampa. Na začiatku je iba stredná (n -tá) zapnutá. Dovoľené je zobrať dve nesusediace vypnuté lampy také, že všetky lampy medzi nimi sú zapnuté a prepnúť všetky tieto lampy (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Koľko najviac takýchto ťahov môžeme urobiť?