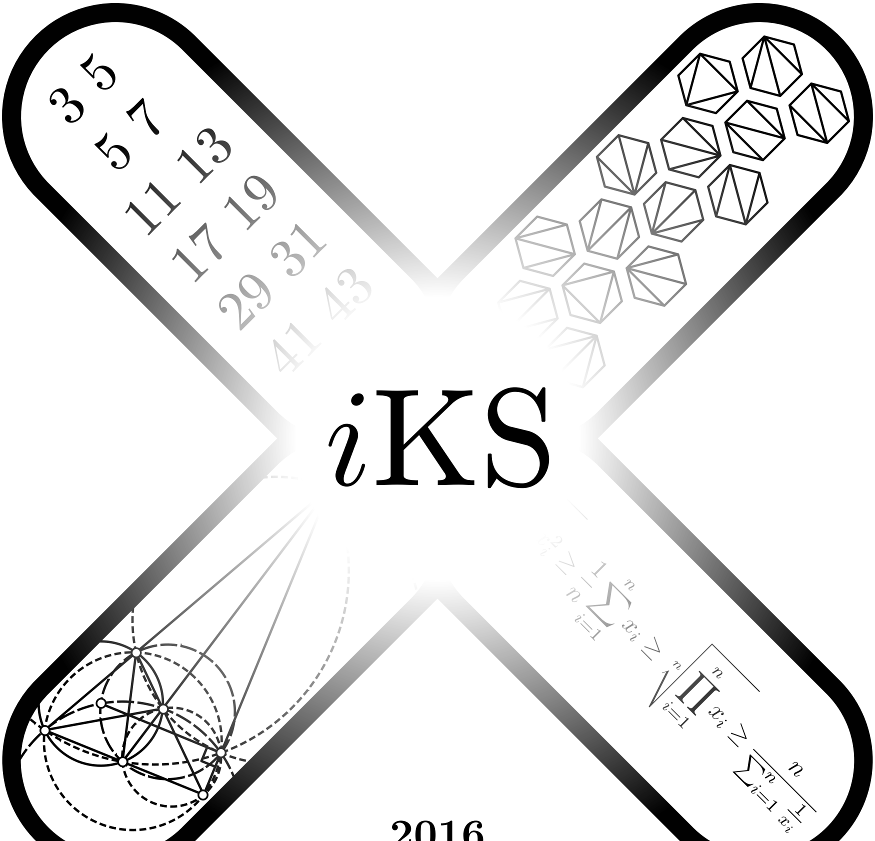


2016

Strmilov

Štěpán Šimsa
Martin „Vodka“ Vodička
Mirek Olšák
Patrik Bak
David Hruška
Matěj Konečný
Miro Psota
Rado van Švarc

Řády a primitivní prvek

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Pro úspěšného olympionika je nutností rozumět tomu, jak se při modulení chová umocňování. Jeden z nejdůležitějších pojmů při umocňování je řád prvku a tento příspěvek obsahuje řadu úloh, u kterých se bez řádů neobedejte. Pokročilejším navazujícím tématem je pak primitivní prvek, jehož znalost ale bývá v obtížnějších úlohách také potřeba.

Definice. *Úplnou sadou zbytků* myslíme množinu $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ zbytků modulo n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n$. Když v ní sčítáme nebo násobíme, tak myslíme automaticky sčítání a násobení modulo n. *Redukovaná sada zbytků* je podmnožina $\mathbb{Z}_n$ obsahující všechna čísla nesoudělná s n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n^*$ a má $\varphi(n)$ prvků, kde φ je Eulerova funkce.

Kvadratické zbytky

Definice. Číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ je kvadratický zbytek, pokud $x^2 \equiv a \pmod n$ pro nějaké $x \in \mathbb{Z}_n$. Pokud takové x neexistuje, říkáme, že a je *kvadratický nezbytek*.

Tvrzení. Pro liché prvočíslo p je kvadratických zbytků $\frac{p-1}{2}$.

Definice. Buď p prvočíslo a a celé číslo. Pak *Legendreův symbol* $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ definujeme předpisem

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } p \mid a, \\ 1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický zbytek modulo } p, \\ -1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický nezbytek modulo } p. \end{cases}$$

Příklad 1. Dokaž, že liché číslo, které se dá zapsat jako součet dvou čtverců, je nutně tvaru $4k+1$.

Řády a mocnění

Definice. Pro každé číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ existuje právě jedna *inverze* modulo n, tj. prvek $a' \in \mathbb{Z}_n^*$ takový, že $aa' \equiv 1 \pmod n$. Obvykle inverzi značíme a^{-1}.

Definice. Pro $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nazveme *řád prvku a modulo n* nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k \equiv 1 \pmod n$. Značíme ho $\operatorname{ord}_n(a)$.

Tvrzení. Pro $a \in \mathbb{Z}_n^*, x, y \in \mathbb{N}_0$ platí

$$a^x \equiv a^y \pmod n \iff x \equiv y \pmod{\operatorname{ord}_n(a)}.$$

Důsledek. Nechť $a \in \mathbb{Z}_n^*, x \in \mathbb{N}_0$. Pak $a^x \equiv 1 \pmod n$ právě, když $\mathrm{ord}_n(a) \mid x$.

Důsledek. Pokud $a^x \equiv 1 \pmod p$ a zároveň $a^y \equiv 1 \pmod p$, pak též $a^{(x,y)} \equiv 1 \pmod p$.

Věta (Wilsonova). Platí, že p je prvočíslo právě tehdy, když $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Věta (Eulerova). Pro $a \in \mathbb{Z}_n^*$ platí $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

Speciálnímu případu této věty, kdy n je prvočíslo (a tedy $\varphi(n) = n-1$), se říká *malá Fermatova věta.*

Tvrzení (Eulerovo kritérium). Nechť p je liché prvočíslo a a je číslo nesoudělné s p, potom $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Tvrzení. Buď p liché prvočíslo a a, b celá čísla. Pak $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$

Příklad 2. Ukaž, že kdykoliv je p prvočíslo a a, b přirozená čísla, pak $p \mid ab^p - ba^p$.

Příklad 3. Ukaž, že pro různá prvočísla p, q platí

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Příklad 4. Nechť p je prvočíslo a b je celé číslo. Dokažte, že $b^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, právě když $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. (MKS 28–9–4)

Příklad 5. Ukaž, že -1 je kvadratický zbytek modulo p právě, když p je tvaru $4k+1$.

Příklad 6. Nechť p je prvočíslo a q je prvočíslo, které dělí $2^p - 1$. Dokaž, že pak $p \mid q-1$.

Příklad 7. Pokud prvočíslo p dělí n-té Fermatovo číslo $2^{2^n} + 1$, pak $2^{n+1} \mid p-1$.

Příklad 8. Najdi všechna kladná celá čísla nesoudělná se všemi členy nekonečné posloupnosti

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

(IMO 2005, 4)

Příklad 9. Buď p prvočíslo tvaru $3k+2$. Platí, že $p \mid a^2 + ab + b^2$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Ukaž, že pak i $p \mid a, p \mid b$.

Příklad 10. Nechť $p \geq 5$ je prvočíslo a $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Ukaž, že $n \mid 2^n - 2$. (iKS 1, N4)

Příklad 11. Dokaž, že pro $n > 1$ nemůže nastat $n \mid 2^{n-1} + 1$. (Schinzel)

Příklad 12. Nalezni všechny trojice prvočísel p, q, r splňující soustavu dělitelností

$$p \mid q^r + 1, q \mid r^p + 1, r \mid p^q + 1.$$

(USA TST 2003)

Příklad 13. Najdi všechna $n > 1$ pro která existuje právě jedno $0 < a \leq n!$ takové, že $a^n + 1$ je dělitelné $n!$. (ISLS 2005, N4)

Příklad 14. Nechť $p \geq 5$ je prvočíslo. Dokaž, že existuje $1 \leq a \leq p - 2$ takové, že ani $a^{p-1} - 1$ ani $(a + 1)^{p-1} - 1$ není dělitelné p^2. (ISLS 2001, N4)

Příklad 15. Nechť p je prvočíslo. Dokaž, že existuje prvočíslo q takové, že pro žádné přirozené číslo n není $n^p - p$ dělitelné q. (IMO 2003, 6)

Primitivní prvek

Definice. Číslo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nazveme *primitivní prvek*, pokud $\mathrm{ord}_n(a) = \varphi(n)$.

Poznámka. Primitivní prvek g je tedy číslo, které „generuje“ celou $\mathbb{Z}_n^*$, neboli

$$\{g^0 \bmod n, g^1 \bmod n, g^2 \bmod n, \ldots\} = \mathbb{Z}_n^*.$$

Tvrzení. Platí

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Věta (Lagrangeova). Nechť P je nenulový polynom stupně n s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$. Pak má rovnice $P(x) \equiv 0 \pmod p$ maximálně n kořenů modulo p.

Věta. Primitivní prvek existuje právě pro modula tvaru $2, 4, p^k, 2p^k$, kde p je liché prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$.

Lemma. Pokud existuje primitivní prvek g modulo n, pak existuje právě $\varphi(\varphi(n))$ (navzájem nekongruentních) primitivních prvků – jsou to g^k pro $1 \leq k \leq n - 1$ splňující $(k, \varphi(n)) = 1$.

Příklad 16. Nechť $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je permutace čísel od 1 do n taková, že součet $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$ není dělitelný $n+1$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n$, až na $i = 1, j = n$. Najdi takovou permutaci pro $n = 22$. (Crux Mathematicorum)

Příklad 17. Nechť p je liché prvočíslo. Najdi všechna taková k, že

$$p \mid 1^k + 2^k + \cdots + (p - 1)^k.$$

(Hungary-Israel Math Competition 2009)

Příklad 18. Nechť p je prvočíslo splňující $p \equiv 3 \pmod 8$ nebo $p \equiv 5 \pmod 8$. Nechť navíc $p = 2q+1$, kde q je také prvočíslo. Spočti $\omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{2^{p-1}}$, kde $\omega \in \mathbb{C}$ splňuje $\omega^p = 1, \omega \neq 1$.

Příklad 19. Pro prvočíslo p urči, jaký je součet všech kvadratických zbytků modulo p. Jak je to s kvadratickými nezbytky?

Příklad 20. Pro každé liché prvočíslo p položme

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \qquad f(p)=\frac{1}{2}-\left\{\frac{F(p)}{p}\right\},$$

kde $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. Urči $f(p)$. (Chinese TST 1993)

Příklad 21. Buď p prvočíslo a $a_1,a_2,\ldots,a_n$ různá přirozená čísla menší než p. Předpokládejme, že $p \mid a_1^k+\cdots+a_n^k$ pro všechna $k\in\{1,2,\ldots,p-2\}$. Urči $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. (Mathematical Reflections)

Příklad 22. Dokaž, že součin všech primitivních prvků modulo p je kongruentní 1 mod p.

Příklad 23. Ukaž, že 2 je primitivní prvek mod 3^n.

Příklad 24. Dokaž, že pokud je p Fermatovo prvočíslo (tedy tvaru $2^{2^k}+1$ pro nějaké $k\in\mathbb{N}$), pak je každý kvadratický nezbytek modulo p současně primitivním prvkem.

Příklad 25. Nechť $n\in\mathbb{N}$. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že nejmenší primitivní prvek p je větší jak n.

Příklad 26. Jsou-li p,q prvočísla, pak kongruence $x^q\equiv 1 \pmod p$ má právě jedno řešení (v $\mathbb{Z}_p$), pokud $q\nmid p-1$, a právě q řešení, pokud $q\mid p-1$. Dokaž.

Jak je to s počty řešení obecnější úlohy $x^q\equiv a \pmod p$?

Příklad 27. Pro $a\in\mathbb{N}_0$ definujme $n_a=101a-100\cdot 2^a$. Pro $0\le a,b,c,d\le 99$ ukaž

$$n_a+n_b\equiv n_c+n_d \pmod{10100} \Longrightarrow \{a,b\}=\{c,d\}.$$

(Putnam 1994)

Příklad 28. Urči počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m\cdot a_n=a_{m\cdot n}$ a zároveň $a_n=a_{n+2011}$. (MKS 30–6–8)

Příklad 29. Nechť $p=4k+3$ je prvočíslo a g je takový jeho primitivní prvek, že $g^2\equiv g+1 \pmod p$. Dokaž, že $g-2$ je také primitivní prvek modulo p.

Příklad 30. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že číslo n^4+1 má prvočíselného dělitele většího než $2n$. (MKS 30–2–8)

Příklad 31. Najdi všechna dvojciferná přirozená čísla n (kde $n=10a+b, a\neq 0, a,b\in\{0,1,\ldots,9\}$) taková, že $k^a\equiv k^b \pmod n$ pro všechna $k\in\mathbb{Z}$.

Příklad 32. Buď $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ množina přirozených čísel, která jsou kvadratickými zbytky modulo p. Najdi nejmenší možné k, aby existovala podmnožina A množiny S velikosti k, součin jejíchž prvků je 1 mod p.

Příklad 33. Nechť p je liché prvočíslo, $m, n \in \mathbb{N}$ nejsou dělitelná p, $s \in \mathbb{N}_0$ a $p \mid m^{2^s} + n^{2^s}$. Dokaž, že pak $p \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$.

Příklad 34. Nechť p je liché prvočíslo a A, B dvě různé neprázdné podmnožiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$ splňující

(i) $A \cup B = \{1, 2, \dots, p-1\}$,
(ii) pokud $a, b \in A$ nebo $a, b \in B$, pak $ab \bmod p \in A$,
(iii) pokud $a \in A$ a $b \in B$, pak $ab \bmod p \in B$.

Najdi všechny takové množiny A, B. (Indická MO)

Literatura a zdroje

[1] Alexandr „Olin“ Slávik: *Primitivní prvek a kvadratická reciprocita*, iKS 1, Hostětín 2012

[2] Josef Svoboda, Štěpán Šimsa: *Seriál z teorie čísel*, `http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf`

[3] Michal „Kenny“ Rolínek: *Důkazové metody v teorii čísel*, Domaslav 2010

[4] Nguyen Thanh Tra: *Chuyen de ve can nguyen thuy*, `http://documents.tips/documents/chuyen-de-ve-can-nguyen-thuy.html`

Hinty

Hint 1. Modulo 4.
Hint 2. Rozeber zvlášť případ, kdy je jedno z čísel dělitelné p, pak využij malou Fermatovu větu.
Hint 3. Podívej se na kongruenci zvlášť modulo p a q, použij malou Fermatovu větu.
Hint 4. Využij Eulerovu větu.
Hint 5. První implikaci sporem s malou Fermatovou větou. Druhou implikaci Eulerovým kritériem.
Hint 6. $\operatorname{ord}_q(2) = p$.
Hint 7. Umocni kongruenci na druhou, abys dostal řád prvku 2 modulo p.
Hint 8. Pro prvočísla $p > 3$ uvaž člen a_{p-2} a využij malou Fermatovu větu.
Hint 9. Platí také $a^3 \equiv b^3 \pmod p$. Umocni na vhodnou mocninu, aby šla využít malá Fermatova věta.
Hint 10. Dokaž $2p \mid n - 1$.
Hint 11. Vyluč sudá čísla, rozlož na součin a uvaž takové prvočíslo p v rozkladu, že $p - 1$ je dělitelné nejmenší mocninou r čísla 2. Dokaž $n \equiv 1 \pmod{2^r}$.
Hint 12. BÚNO p je nejmenší. Pokud je p liché, dokaž $p \mid q - 1$ nebo $p \mid q + 1$ a vyluč první možnost a následně dokaž $q \mid r + 1$ a $r \mid p + 1$.
Hint 13. Platí pro prvočísla. Pro lichá složená uvaž $a = \frac{n!}{d} - 1$, kde $d \mid n$. Pro lichá prvočísla dokaž, že $\frac{a^n+1}{a+1}$ je nesoudělné s $(n-1)!$.
Hint 14. Označ C množinu těch a pro které $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Dokaž $|C| \le \frac{p-1}{2}$. Dále sporem dostaň $1, 3, \dots, p-2 \in C$ a spor vyvoď z $p-4, p-2 \in C$.
Hint 15. Vezmi libovolné prvočíslo $q \mid \frac{p^p-1}{p-1}$. Dokaž $q \equiv 1 \pmod p$ a $q \mid p^k - 1$, kde $q = kp+1$. Potom dokaž $p \mid k$ a $q \equiv 1 \pmod{p^2}$. To nemůže nastat pro všechny prvočíselné dělitele $\frac{p^p-1}{p-1}$.
Hint 16. Vezmi primitivní prvek a umocňuj.
Hint 17. Zapiš čísla $1, \dots, p-1$ pomocí jednoho primitivního prvku a využij vzoreček pro součet geometrické řady.
Hint 18. Dokaž, že 2 je primitivní prvek modulo p a adekvátně interpretuj exponenty u ω.
Hint 19. Kvadratické zbytky jsou přesně ty prvky $\mathbb{Z}_p^*$, u kterých má primitivní prvek sudý exponent.
Hint 20. Doplň sumaci až do $p - 1$, převeď sumu na součet mocnin primitivního prvku a rozeber případy $p - 1 \nmid 120, p - 1 \mid 120$.
Hint 21. Polož $a_i = g^{\alpha_i}$, kde g je primitivní prvek, a uvažuj polynom $x^{\alpha_1} + \cdots + x^{\alpha_n}$.
Hint 22. Inverzní prvek k primitivnímu prvku je opět primitivní.
Hint 23. Indukcí podle n. Musí platit $\varphi(3^n) = \operatorname{ord}_{3^n}(2) \mid \operatorname{ord}_{3^{n+1}}(2) \mid \varphi(3^{n+1})$. Další indukcí vyluč případ $\operatorname{ord}_{3^{n+1}} = 2 \cdot 3^{n-1}$.
Hint 24. Kvadratické zbytky nemohou být primitivními prvky. Kolik má p primitivních prvků?
Hint 25. Stačí, aby čísla $1, 2, \dots, n$ byly kvadratické zbytky modulo p. Čínská zbytková a Dirichletova věta.
Hint 26. Polož $x = g^i$, kde g je primitivní prvek a $i \in \mathbb{N}$, a zaměř se na exponenty. V obecnějším případě navíc polož $a = g^j$.

Hint 27. Rozděl na kongruenci modulo 100 a modulo 101, využij $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ a nakonec skutečnost, že 2 je primitivní prvek modulo 101.
Hint 28. Ukaž, že posloupnost obsahuje pouze čísla $-1, 0, 1$. Vezmi primitivní prvek g modulo 2011 a všechny členy až na a_0 vyjádři pomocí a_g.
Hint 29. Inverzní prvek ke g je také primitivní a je to $g-1$. Platí $(g-1)^{2k+3} \equiv g-2 \pmod{p}$.
Hint 30. Dokaž, že prvočíslo $p = 8k+1$ dělí nějaké číslo tvaru n^4+1. Využij Dirichletovu větu.
Hint 31. Uvaž prvočíslo $p \mid n$ a nějaký jeho primitivní prvek g, ten dosaď za k. Dourozebírej.
Hint 32. Pro $k < \frac{p-1}{2}$ uvaž $S = \{g^2, g^2, \ldots, g^2\}$, kde g je primitivní prvek modulo p. Pro $k \geq \frac{p-1}{2}$ rozepiš prvky S pomocí primitivního prvku a hledej podmnožinu exponentů se správným součtem.
Hint 33. Umocni na 2^s kongruenci $g^k \equiv mn^{-1} \pmod{p}$ (g prim. prvek).
Hint 34. Musí být $A \cap B = \emptyset$. Do které množiny padne primitivní prvek?

Kombinatorické nepočítání

Mirek Olšák

Abstrakt. Když chceme ukázat, že dvě množiny jsou stejně velké, je často zbytečně pracné počítat jim prvky. Přitom může stačit sestrojit bijekci, či prostě jen „nahlédnout“, že je to v obou případech totéž.

Definice. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je počet možností, jak do n přihrádek umístit k nerozlišitelných kuliček, do každé nejvýše jednu.

Rozcvička

Cvičení 1. Nahlédněte, že $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cvičení 2. Nahlédněte, že roznásobením $(a+b)^n$ dostaneme

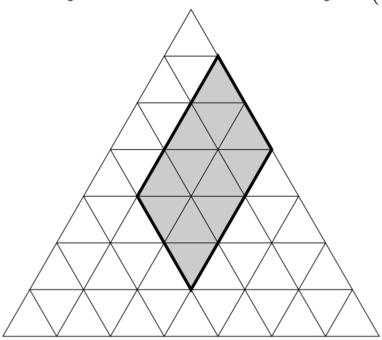
$$\binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^0.$$

Cvičení 3. Nahlédněte

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Cvičení 4. Nahlédněte, že počet možností, jak na šachovnici umístit blíže neurčený počet střelců tak, aby se vzájemně neohrožovali, je druhou mocninou přirozeného čísla.

Cvičení 5. Uvědomte si, že počet všech rovnoběžníků v rovnostranném trojúhelníku o straně délky n s trojúhelníkovou mřížkou je $3\binom{n+2}{4}$.



Všehochuť

Cvičení 6. Je dáno přirozené číslo k a $n \geq k$. Uvažme náhodnou permutaci na $\{1, 2, \ldots, n\}$. Nahlédněte, že pravděpodobnost, že prvky $1, 2, \ldots, k$ leží v jednom cyklu, nezávisí na volbě n.

Cvičení 7. Označme x_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících podslovo $ABABA$ ani $BABAB$ a dále označme y_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících nikde pět stejných po sobě jdoucích písmen. Nahlédněte, že $x_n = y_n$.

Cvičení 8. Alča si nakreslila čtvercovou mřížku $n \times n$ a do každého políčka napsala počet všech obdélníků (a čtverců) v mřížce, které obsahují dané políčko (na obrázku je situace pro $n = 3$). Uvědomte si, že součet čísel ve všech políčkách je roven $\binom{n+2}{3}^2$. (MKS–29–3–7, Rakousko 2002)

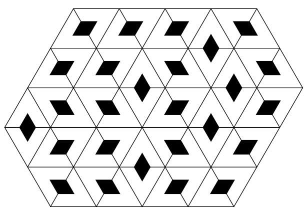
9	12	9
12	16	12
9	12	9

Cvičení 9. Letecká společnost provozuje (obousměrné) spoje mezi některými (neuspořádanými) dvojicemi z n měst (povolené je i neprovozovat žádný spoj či všechny). Města přitom mají různé priority. Pokud navíc existuje spoj mezi městy a, b a město c má vyšší prioritu než b, tak existuje i spoj mezi a, c. Uvědomte si, že počet možností, jaké spoje provozovat, je 2^{n-1}.

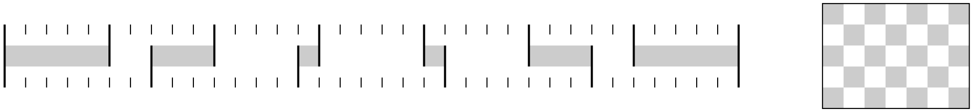
Cvičení 10. V $n-1$ vrcholech pravidelného n-úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný sousední vrchol (jeden ze dvou), a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n-2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Uvědomte si, že pravděpodobnost přežití každé ovce je stejná.

Cvičení 11. Jsou dána přirozená čísla a, b, c. Uvažujte všechny tabulky nezáporných celých čísel $a \times b$, v nichž všechny řádky a sloupce jsou nerostoucí a všechna čísla jsou rovna nejvýše c (levý obrázek). Na druhé straně uvažte šestiúhelník s vnitřními úhly $120°$ a stranami délek a, b, c, a, b, c a sadu kosočtverečků slepených ze dvou jednotkových rovnostranných trojúhelníků (pravý obrázek). Nahlédněte, že počet tabulek je stejný jako počet možností, jak vyskládat šestiúhelník kosočtverečky.

2	2	1	1
2	2	0	0
1	1	0	0



Cvičení 12. Buďte a, b nesoudělná lichá čísla. Na pravítku dlouhém ab vyznačme nejprve každou a-tou rysku, pak každou b-tou rysku, a nakonec obtáhněme každý druhý úsek mezi vyznačenými ryskami (začneme obtáhnutím prvního). Uvědomte si, že celková délka obtaženého úseku je rovna počtu černých políček na šachovnici $a \times b$, jejíž rohová políčka jsou černá. (MKS–31–8–6, Ruský folklór)



Cvičení 13. Permutacím σ na množině $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, pro něž existuje $i < 2n$ takové, že $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$, říkejme dobré. Ostatní nazývejme špatné. Uvědomte si, že dobrých permutací je více než špatných. (IMO–1989–6)

Cvičení 14. Jsou dána čísla $n \geq k$ stejné parity. V řadě stojí $2k$ lamp očíslovaných $1, \ldots, 2k$. Na začátku jsou všechny zhasnuté. Jeden krok spočívá v rozsvícení zhasnuté lampy nebo zhasnutí rozsvícené. Označme X počet n-prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \ldots, k$, a dále označme Y počet n-prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \ldots, k$, přičemž byly přepínány pouze tyto lampy. Rozmyslete si, že

$$\frac{X}{Y} = \frac{2^n}{2^k}.$$

(IMO–2008–5)

Cvičení 15. Je dáno $n \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Z bodu s menším číslem vede vždy šipka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B. Uvědomte si, že počet jednobarevných obarvení je $n!$. (ARO–2005)

Cvičení 16. Adam a Bedřich hrají iKS-tenis na n míčků. Pokaždé jeden hráč podává míček a některý z hráčů tento míček vyhraje. V okamžiku, kdy má někdo vyhráno n míčků, vyhrává celý zápas. První míček podává Adam a dále mohou být dvě schémata podávání: a) podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček, b) hráči se v podání se pravidelně střídají. Předpokládejme, že pravděpodobnost výhry míčku závisí vždy jen tom, který hráč podával. Rozmyslete si, že celkové šance hráčů na výhru zápasu nezávisí na volbě schématu.

Cvičení 17. Jako plné n-tice přirozených čísel budeme označovat ty, ve kterých pro každé $i \geq 2$, jež se v n-tici vyskytuje, platí, že se v n-tici vyskytuje i $i - 1$, přičemž první výskyt $i - 1$ je před posledním výskytem i. Rozmyslete si, že plných n-tic je $n!$. (IMO Shortlist 2002)

Cvičení 18. Označme $G(n)$ počet všech možných stromů (souvislých grafů bez kružnic) na daných n vrcholech. Bijektivně ukažte

$$n^n = G(n) \cdot n^2.$$

Cesty v mřížce

Cvičení 19. Nahlédněte, že počet cest délky $a+b$ z levého dolního rohu do pravého horního v mřížce $a \times b$ je $\binom{a+b}{a}$.

Cvičení 20. Nechť a, b jsou přirozená čísla. Uvažme cesty podél mřížky z bodu $[0,0]$ do bodu a, b, které nikdy nejdou doleva, nachází se v nich právě jeden krok dolů a žádný vrchol není navštívený vícekrát. Uvědomte si, že jejich počet je roven $(a+1)\binom{a+b}{a-1}$. (Variace na celostátní kolo MO 2015)

Cvičení 21. Označme

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k$$

Rozmyslete si, že $f(n) + f(n-1) = 2^n$.

Cvičení 22. Bijektivně ukažte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

Rozklady

Definice. Rozkladem čísla n délky $k \geq 1$ rozumíme konečnou nerostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1, \ldots, a_k$ splňující $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Cvičení 23. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ délky n.

Cvičení 24. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n délky k je stejný jako počet rozkladů n, kde $a_1 = k$.

Cvičení 25. Rozklad nazveme symetrický, pokud pro každé i udává a_i počet prvků rozkladu velkých alespoň i. Uvědomte si, že symetrických rozkladů čísla n je stejně jako těch rozkladů čísla n, kde jsou jednotlivá a_i různá a současně lichá.

Cvičení 26. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme $f(m, n)$ počet n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ celých čísel splňujících $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq m$. Rozmyslete si, že $f(m, n) = f(n, m)$.

Cvičení 27. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n, ve kterých jsou všechna a_i různá, je stejný jako počet rozkladů čísla n, ve kterých jsou všechna a_i lichá.

Cvičení 28. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n, které neobsahují druhou mocninu přirozeného čísla, je stejný jako počet rozkladů čísla n, ve kterých se každé číslo i vyskytuje nanejvýš $(i-1)$-krát.

Fibonacciho čísla

Definice. Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1)\times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1, nazýváme n-tým Fibonacciho číslem a značíme F_n.

Cvičení 29. Nahlédněte, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1)\times 2$ dominovými kostičkami je roven F_n.

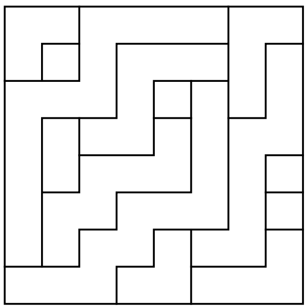
Cvičení 30. Nahlédněte

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b.$$

Cvičení 31. Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $(n+1)\times 1$ na dílky větší než 1×1, je F_n.

Cvičení 32. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $n\times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je F_n.

Cvičení 33. Hadem označme konečnou posloupnost čtverečků v mřížce takovou, že každý následující čtvereček je těsně nad předchozím nebo těsně vpravo od něj. Rozmyslete si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $a\times b$ pomocí hadů, je součinem několika (ne nutně různých) Fibonacciho čísel. Na obrázku je ukázka vyskládaného čtverce 8×8.



Catalanova čísla

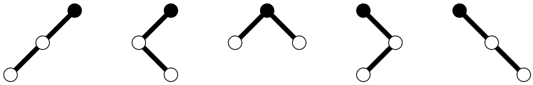
Definice. Počet všech cest délky $2n$ ve čtvercové mřížce $n\times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou celé nad odpovídající úhlopříčkou, nazýváme n-té Catalanovo číslo a značíme jej C_n.

Cvičení 34. Uvědomte si, že C_n je rovno počtu náhrdelníků s n bílými a $n+1$ černými korálky, přičemž náhrdelníky lišící se pouze otočením (nikoli překlopením) považujeme za nerozlišitelné. Na základě toho odvoďte

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

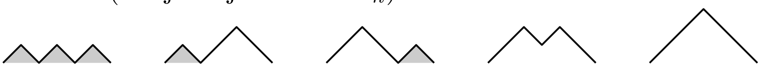
Cvičení 35. Nahlédněte, že počet možností, jak na sebe poskládat pyramidu z mincí se spodní řadou o n mincích (viz obrázek), je roven C_n.

Cvičení 36. Rozmyslete si, že C_n udává počet zakořeněných binárních stromů na n vrcholech, kde rozlišujeme pravé a levé syny.



Cvičení 37. Na základě předchozího cvičení nahlédněte, že počet možností, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$-úhelník na n trojúhelníků, je C_n.

Cvičení 38. Dyckovou n-cestou rozumíme cestu o $2n$ krocích zprava doleva, která začíná ve výšce 0, v každém kroku popojde o 1 šikmo nahoru nebo o 1 šikmo dolů, končí ve výšce 0 a nikdy nejde do záporné výšky. Kopečkem v Dyckově n-cestě rozumíme vrchol ve výšce 1, jehož oba sousední vrcholy leží ve výšce 0. Rozmyslete si, že počet všech kopečků ve všech Dyckových n-cestách je stejný jako počet všech Dyckových n-cest (což je zřejmě rovno C_n).



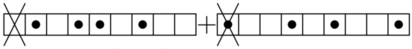
Cvičení 39. Obrazcem délky n rozumíme neuspořádanou dvojici cest v mřížce délky n vedoucích pouze doprava a nahoru, a navíc takových, že se potkají pouze v prvním a posledním bodě. Bijektivně ukažte, že počet obrazců délky n je C_{n-1}. Na obrázku jsou dva obrazce délky 9. (MKS–26–4–8)

Literatura a zdroje

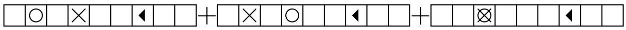
[1] Richard P. Stanley, *Bijective proofs problems*
`http://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf`

[2] Yufei Zhao, *Bijections*
`http://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf`

Hinty

Hint 1. 

Hint 2. Sčítanec $a^i b^{n-i}$ dostaneme tolikrát, kolik je možností, jak v i závorkách vybrat a a ve zbylých $n-i$ vybrat b.

Hint 3. 

Hint 4. Počet možností, jak je umístit na bílá políčka krát počet možností, jak je umístit na černá.

Hint 6. Při procházení cyklu začínajícího bodem 1 přeskakujte čísla vyšší než k.

Hint 7. Invertujte každou druhou pozici.

Hint 10. Každá ovce si všimne vlka až v okamžiku, kdy se poprvé octne vedle ní.

Hint 13. Ve špatné permutaci přesuňte první prvek ke svému „kamarádovi“.

Hint 14. Vyjádřete pomocí X, případně Y, počet těch n-prvkových posloupností kroků takových, že na konci bude pro každé $i \leq k$ svítit právě jedna z dvojice lamp $i, k+i$.

Hint 15. Obraťte červené šipky.

Hint 16. Kolikrát nejvýše mohou podávat jednotliví hráči v jednotlivých schématech? Karty osudu jsou rozdány, na hře nezáleží.

Hint 17.

$$2,1,2,1,2,1,3,3 \Leftrightarrow 6,3,5,2,4,1,8,7$$

Hint 19. Právě a ze všech $a+b$ kroků povede vodorovně.

Hint 23. V rozkladu délky n snižte každý sčítanec o 1.

Hint 27.

$$1+1+1+1+1+3+3+3 = 1+4+3+6$$

Hint 28. Nahrazujte v prvním typu rozkladů vždy k stejných čísel k za číslo k^2.

Hint 29. Stačí první řádek.

Hint 34. Černá = nahoru, bílá = doprava. Existuje právě jedno natočení náhrdelníku takové, že jej držíme za černý korálek a zbylá cesta vede nad úhlopříčkou.

Teória grafov

Martin "Vodka" Vodička

Abstrakt. Príspevok obsahuje základné techniky a myšlienky, ktoré sa dajp použiť pri riešení grafových úloh a samozrejme aj samotné úlohy na ktorých sa to dá vyskúšať.

Ak ste čakali, že v tomto príspevku bude veľa drsných viet, ktoré použijete ako kladivá na grafové úlohy, tak ste na omyle. Hoci v teórii grafov je toho už podokazovaného strašne veľa, tak olympiádne úlohy sa snažia byť také, aby znalosť nejakej dokázanej vety úlohu "nezabila". Samozrejme znalosť pár viet môže pomôcť, ale nie je kľúčom k riešeniu. Kľúčom k riešeniu je ako všade v kombinatorike - myslieť.

Samozrejme občas sa v tomto príspevku nejaká tá veta vyskytne, no často len preto, že jej dôkaz je v zásade pekná úloha, a aby sa vám trocha zväčšil obzor, čo všetko platí a získali ste menší nadhľad.

Začneme tým, že si pripomenieme nejaké základné pojmy.

Definícia.

- Grafom G nazývame dvojicu $G = (V, E)$, kde V je konečná množina vrcholov a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hrán.
- Stupeň vrcholu $d(v)$ je počet hrán, ktoré z neho vychádzajú.
- Cesta v grafe G je postupnosť rôznych vrcholov taká, že každé dva po sebe idúce vrcholy sú spojené hranou.
- Kružnica (cyklus) v grafe G je cesta, ktorej začiatok aj koniec sú spojené hranou.
- Graf G je súvislý ak pre ľubovoľné dva vrcholy existuje cesta z jedného vrcholu do druhého.
- Graf je kompletný ak sú každé dva vrcholy spojené hranou. kompletný graf na n vrcholoch označujeme K_n.
- Komplement ku grafu G je graf G', ktorý má rovnaké vrcholy, akurát hrany sú medzi tými vrcholmi, medzi ktorými nebola hrana v G.
- Strom je súvislý graf bez cyklov.
- Graf G je bipartitný, ak existujú množiny A, B také, že $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$ a neexistuje hrana, ktorá by spájala dva vrcholy z A alebo dva vrcholy z B.
- Orientovaný graf, je graf, v ktorom má každá hrana smer. Kompletný orientovaný graf sa nazýva turnaj.

Veľmi rýchlo si uvedomte platnosť nasledujúcich tvrdení.

Cvičenie 1. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Graf je bipartitný práve vtedy, ak neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky,
- Aspoň jeden z dvojice grafov G, G' je súvislý.
- Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

1) G je strom.
2) G je minimálny súvislý graf.
3) G je maximálny graf bez cyklov.

- Z ľubovoľných dvoch nasledujúcich tvrdení vyplýva tretie:

1) G je súvislý.
2) G neobsahuje cyklus.
3) G má $n-1$ hrán.

- $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Ľahké, že?

Žiaľ úlohy s grafmi nie sú vždy takto jednoduché. Takže, teraz si môžeme povedať, aké finty sa dajú použiť v grafových úlohách. Veľmi užitočná vec je indukcia. V grafoch sa indukcia dá použiť rôzne. Základ je indukcia na počet vrcholov, v prípade núdze sa dá použiť indukcia na počet hrán. Avšak niekedy môže byť užitočná aj nejaká divnejšia indukcia.

Ak robíte indukciu, pri grafoch je dosť dôležité aby ste ju robili odoberaním a nie pridávaním vrcholov. Jednak sa nemusíte uisťovať, že naozaj vytvoríte všetky grafy a dvak, často môžete vhodne zvoliť vrchol, ktorý odoberiete. Prípadne nemusíte odobrať len jeden vrchol, ale proste využijete indukčný predpoklad na nejakom (oveľa) menšom grafe.

Veľmi dobre sa robí indukcia na stromoch, často stačí odobrať list (vrchol stupňa 1), prípadne všetky listy.

Na ukážku si jednu vetu dokážeme indukciou:

Veta (Turanova). Nech G je graf, ktorý neobsahuje K_p (teda medzi ľubovoľnými p vrcholmi sú apsoň dva nespojené). Potom $|E| \leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{p-1})$

Zindukujte

Úloha 2. Dokážte, že ak T je strom, tak existuje vrchol, ktorý leží na všetkých najdlhších cestách v T. (Iran 2011)

Úloha 3. Nech G je súvislý graf. Označme G^3 graf, v ktorom sú spojené tie vrcholy, medzi ktorými v G existuje cesta dĺžky najviac 3. Dokážte, že G má kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy.

Úloha 4. Do triedy chodí konečný počet dievčat a chlapcov. Živá skupina chlapcov je taká, že každé dievča pozná aspoň jedného chlapca zo skupiny. Podobne, živá skupina dievčat je taká, že každý chlapec pozná aspoň jedno dievča zo skupiny. Dokážte, že počet živých skupín chlapcov má rovnakú paritu ako počet živých skupín dievčat. (Poznanie sa je vzájomné, ak Fero pozná Aničku, tak aj Anička pozná Fera.)
(výberko 2011)

Úloha 5. Na nekonečnej šachovnici máme vyznačených 100 políčok, po ktorých sa môže pohybovať veža. Medzi každou dvojicou vyznačených políčok sa dá dostať konečným počtom ťahov vežou. (Vežou môžeme ťahať medzi ľubovoľnými dvoma vyznačenými políčkami v rovnakom riadku alebo stĺpci.) Dokážte, že vieme vyznačené políčka rozdeliť na 50 dvojíc tak, že políčka každej dvojice ležia v rovnakom riadku alebo stĺpci. (výberko 2014)

Úloha 6. Na ostrove žije n domorodcov. Každí dvaja z nich sú buď priatelia alebo nepriatelia. Jedného dňa náčelník rozkázal všetkým obyvateľom (vrátane seba), aby si vyrobili a nosili náhrdelník z mušličiek, pričom ľubovoľní dvaja priatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch aspoň jednu mušličku rovnakého druhu. Ľubovoľní dvaja nepriatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch všetky mušličky rôzneho druhu. (Je prípustný aj náhrdelník bez mušličiek.)

a) Ukážte, že domorodci mohli splniť náčelníkov rozkaz.
b) Nájdite najmenší počet mušličiek na to, aby domorodci určite mohli splniť náčelníkov rozkaz.

Úloha 7. Česi a Slováci hrali proti sebe iKS-dvojboj. Ten prebiehal tak, že najprv si každý Slovák zahral z každým Čechom rátanie príkladu na rýchlosť a víťaz si pripísal jeden bod. Ono pri tom však ide čisto o skill, ktorý mal každý hráč konštantný počas celého turnaja a vyhral vždy ten s väčším skillom.

Potom (aby aj tí slabší mali šancu) si každý Slovák z Čechom zahral hod kockou. Tam vyhrá ten, kto hodí väčšie číslo, v prípade remízy sa opakuje, až kým nie je víťaz. Opäť si víťaz pripísal bod.

Po dvojboji sa zistilo, že každý účastník získal rovnaký počet bodov za hod kockou ako za rátanie príkladov. Dokážte, že pre ľubovoľného Slováka S a Čecha C platí: S vyhral nad C hod kockou práve vtedy, ak vyhral nad C v rátaní príkladu.

Úloha 8. V krajine je 2016 ostrovov a 2015 mostov medzi nimi, tak aby sa z ľubovoľného ostrova dalo dostať na iný po mostoch. Teraz z každého ostrova pošlú list na nejaký ostrov (môžu aj sami sebe). Avšak platí nasledovné: Ak je ostrov A spojený mostom s ostrovom B, tak adresát listu s ostrova A je spojený mostom s adresátom ostrova B alebo ide o ten istý ostrov. Dokážte, že platí aspoň jedna z nasledujúcich dvoch vecí:

1) Existuje ostrov, ktorý poslal list sám sebe.
2) Existujú 2 ostrovy spojené mostom, medzi ktorými boli navzájom poslané listy.

(Japonsko 2010)

Úloha 9. V senáte je 51 senátorov. Senátorov potrebujeme rozdeliť do n výborov. Každý senátor neznáša práve troch iných senátorov. Ak senátor A neznáša senátora B, neznamená to nevyhnutne, že aj senátor B neznáša senátora A. Nájdite najmenšie n, pre ktoré je vždy možné rozdeliť senátorov do výborov tak, že všetci senátori v jednom výbore sa navzájom znášajú. (výberko 2011)

Úloha 10. V krajine Jednosmersko, sú niektoré mestá spojené cestami. Niektoré cesty majú prepravnú kapacitu 1 a niektoré až 2. Vie sa, že súčet kapacít ciest ktoré sú napojené na jedno mesta je nepárny. Avšak minister dopravy chce, aby všetky cesty boli jednosmerné, a preto potrebuje každej ceste priradiť smer. Chce to však urobiť tak, aby rozdiel súčtu kapacít ciest, ktoré vchádzajú do mesta a súčtu kapacít ciest ktoré z neho vychádzajú bol 1 (v absolútnej hodnote). Dokážte, že sa mu to podarí. (USA TST 2011)

skúmanie malých častí grafu

Ďalšou dobrou metódou je skúmanie malých častí grafu. Proste sa pozrieme na ľubovoľnú trojicu, štvoricu vrcholov, a zistíme, že musí vyzerať nejako špeciálne alebo proste spočítať niečo cez malé množiny vrcholov.

Napríklad:

Tvrdenie. V turnaji označme v_i počet víťaztiev a p_i počet prehier hráča i. Potom $\sum_{i \in V} v_i^2 = \sum_{i \in V} p_i^2$

Úloha 11. Na turnaji s $n \geq 3$ účastníkmi, hral každý s každým a neboli remízy. Trojica hráčov sa nazýva remízová, ak prvý porazil druhého, druhý tretieho a tretí prvého. nájdite maximálny počet remízových trojíc. (Poľsko 2004)

Úloha 12. $n \geq 4$ hráčov sa zúčastnilo turnaja, každý hral s každým a neboli remízy. Nazveme štvoricu hráčov zlá, ak jeden hráčov vyhral nad všetkými zo štvorice, a ostatní porazili práve jedného zo štvorice. Predpokladajme, že na turnaji nie sú zlé štvorice. nech v_i a p_i označujú počet výhier, resp. prehier i-teho hráča. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - l_i)^3 \geq 0.$$

(Shortlist 2010)

Úloha 13. Medzi 120 ľuďmi sa niektorí poznajú a niektorí nie. Skupina ľudí sa nazýva slabé kvarteto, ak sa medzi nimi pozná práve jedna dvojica. Nájdite maximálny možný počet slabých kvartet. (Shortlist 2003)

Ofarbenia grafu

Často sa v grafe niečo farbí a to už vrcholy alebo hrany. A to typicky tak, že dva vrcholy zafarbené rovnakou farbou nie sú spojené hranou resp. dve susedné hrany nie sú zafarbené rovnakou farbou.

Definícia. Chromatickým číslom grafu $\chi(G)$ nazývame minimálny počet farieb, ktorými sa dajú ofarbiť jeho vrcholy tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali rovnakú farbu.

Zrejme, ak graf obsahuje K_n, tak platí, že $\chi(G) \geq n$, avšak naopak nič podobné neplatí.

Tvrdenie. Pre ľubovoľné číslo k existuje graf G, ktorý neobsahuje trojuholník pre ktorý platí $\chi(G) \geq k$.

To len chce ukázať, že farbiteľnosť grafov vôbec nie je ľahká záležitosť a preto úlohy z ofarbením môžu byť náročné. Napriek tomu ofarbenie môže niekedy aj pomôcť.

Úloha 14. Na mierovú konferenciu n rôznych krajín. Každá krajina poslala jedného generála a jedného špeha. Pričom každé dve krajiny už majú dohodu o neútočení alebo nie. Treba však špehov a generálov rozdeliť do izieb, tak aby žiadni špeh nebol s generálom na izbe. Navyše každý generál chce byť na izbe iba s generálmi, s ktorými majú dohodu o neútočení. Naopak, každý špeh chce byť len so špehmi, s ktorými ich strana nemá dohodu o neútočení. Nájdite minimálny počet izieb, pre ktoré vždy vieme ľudí rozdeliť do izieb podľa ich požiadaviek.

Úloha 15. Nech T je turnaj. Definujme dobré zafarbenie hrán turnaja ako také, že pre ľubovoľné hrany $\overrightarrow{uv}$ a $\overrightarrow{vw}$, sú tieto hrany rôznej farby. Avšak hrany $\overrightarrow{uv}$ a $\overrightarrow{uw}$ môžu byť rovnakej farby. Orientované hranové chromatické číslo turnaja je definované ako najmenší počet farieb, ktoré potrebujeme na dobré zafarbenie hrán. Pre každé n, nájdite minimum orientovaných hranových chromatických čísel medzi všetkými turnajmi na n vrcholoch. (USA TST 2015)

Úloha 16. Majme $n = 3$ rôznych farieb. Nech $f(n)$ označuje najväčšie celé číslo s vlastnosťou, že každá strana a každá uhlopriečka konvexného mnohouholníka majúceho $f(n)$ vrcholov sa dá ofarbiť jednou z n farieb nasledujúcim spôsobom:

- použité sú aspoň dve farby a
- každé tri vrcholy mnohouholníka určujú buď trojicu úsečiek rovnakej farby, alebo trojicu úsečiek troch rôznych farieb.

Dokážte, že $f(n) \geq (n-1)^2$, a že rovnosť v tejto nerovnosti nastáva pre nekonečne veľa n. (MEMO 2009)

Úloha 17. Zafarbíme hrany K_n $n-1$ farbami. Vrchol nazveme dúha, ak hrany, ktoré z neho vychádzajú sú všetkých rôznych farieb. Koľko dúh najviac môže existovať? (Iran 2012)

Úloha 18. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2. Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q, ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť roboti R_1, Q_1 aj roboti R_2 a Q_2. Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R. To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

Úloha 19. V krajine sú niektoré mestá spojené leteckými linkami, pri čom sa vieme lietadlom dostať z každého mesta od každého. Ak uvažujeme okružný let (začneme z toho mesta kde skončíme) zložený z nepárneho počtu rôznych letov, a všetky tieto lety zrušíme, tak už existujú budú existovať dve mestá medzi ktorými sa nedá dostať letecky. Dokážte, že môžeme krajinu rozdeliť na 4 oblasti tak, že lety budú len medzi mestami z rôznych oblastí. (ARO 2010)

Rôzne

Úloha 20. Ukážte, že v turnaji n hráčov nastane práve jeden z nasledujúcich dvoch prípadov: buď existuje kružnica dĺžky n, alebo môžeme hráčov rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín tak, že každý hráč z prvej skupiny porazil každého hráča z druhej skupiny. (KMS 2008)

Úloha 21. V krajine je každé mesto spojené cestou s práve troma iným mestami. Minulý rok sme išli na výlet a podarilo sa nám ísť po cestách tak, že sme prešli každým mestom práve raz. Tento rok to chcem urobiť znova avšak chceme použiť aspoň jednu cestu po ktorej sme minulý rok nešli. Dokážte, že to vieme urobiť. (Japonsko 2004)

Úloha 22. Na šachovnici $n \times n$ je obvod (a nič iné) obtiahnutý červenou. Dvaja hráči, Aladár a Boris, hrajú takúto hru: Hráč si v každom ťahu zvolí políčko šachovnice a obtiahne červenou jednu jeho stranu (ktorá ešte nebola červená). Tým vznikne medzi dvoma susednými políčkami nepriechodná hranica. Hra končí, keď je šachovnica červenými hranicami rozdelená na dve časti. Hráč, ktorý šachovnicu takto rozdelil, prehráva. Začína Aladár. Určte, ktorý hráč dokáže pre dané n vždy vyhrať a popíšte jeho víťaznú stratégiu. (výberko 2010)

Úloha 23. Medzi 30 študentmi má každý študent maximálne 5 kamarátov a pre ľubovoľných 5 študentov existuje dvojica, ktorí nie sú kamaráti. Nájdite maximálnu hodnotu k, že určite vieme nájsť k ľudí, medzi ktorými nie je ani jedna dvojica kamarátov. (Čína 2015)

Úloha 24. V každej z troch krajín žije $2n$ matematikov. Nájdite najmenšie celé číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: Ak každý matematik pozná aspoň k kolegov z iných krajín, tak existujú traja matematici, ktorí sa poznajú navzájom. (Vzťah „poznať sa“ je vzájomný.) (Výberko 2013)

Úloha 25. Na grafe vieme robiť nasledujúcu operáciu: Zvolíme ľubovoľnú kružnicu dĺžky 4, a vymažeme z nej jednu hranu. Pre pevné $n \geq 4$ nájdite najmenší možný počet hrán grafu, ktorý sa takto dá dosiahnuť s kompletného grafu na n vrcholoch. (shortlist 2004)

Pre tých, čo ešte pamätajú na Fota

Keby ste náhodou nevedeli…[1])

[1]) Foto je starý bývalý vedúci KMS. Je preslávený svojimi úlohami, ktoré dával na prípravku a výberku. Ak chcete vidieť, tak si pozrite 3. deň :) https://www.kms.sk/vyberko.php?r=2009

Úloha 26. Pre graf G, nech $f(G)$ je počet trojuholníkov $g(G)$ počet štvorstenov v G. Nájdite najmenšiu konštantu c, že pre každý graf G platí:

$$g(G)^3 \leq c \cdot f(G)^4.$$

(Shortlist 2004)

Úloha 27. Univerzitu navštevuje 2^{n+1} študentov, pričom $n \geq 2$ a žiadni dvaja študenti nie sú rovnako starí. Na univerzite funguje 2^n korešpondenčných seminárov pre talentovanú mládež. Každý seminár má za vedúcich (organizátorov) niekoľko dobrovoľníkov z radov študentov univerzity. Žiadne dva semináre nevznikli v tom istom čase, vznikali postupne. Každý študent môže robiť vedúceho vo viacerých seminároch, ale len ak sa tým neporušuje jedno dôležité pravidlo. Nemôže existovať spomedzi ním organizovaných seminárov dvojica AKS a BKS a dvojica od neho mladších študentov a a b takých, že a je mladší od b, a robí vedúceho v AKS, b robí vedúceho v BKS a zároveň BKS je novší ako AKS. Dokážte, že aspoň jeden korešpondenčný seminár trpí nedostatkom vedúcich, teda že ich nemá viac ako $4n$.

(výberko 2010)

Hinty

Hint 2. indukcia, odoberte všetky listy

Hint 3. Stačí dokázať pre stromy, indukciou dokážte, že tá kružnica môže obsahovať ľubovoľnú hranu z G.

Hint 4. Indukcia na počet vrcholov, odoberte jeden. Ako sa zmení počet živých skupín?

Hint 5. Uvažujte to ako bipartitný graf, kde sú vrcholy stĺpce a riadky a políčka sú hrany. Uvedomte si, čo chcete a indukcia na počet hrán.

Hint 6. Je to $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Ako príklad skúste bipartitný graf. A dôkaz ide indukciou na počet vrcholov, odoberte vrchol s najmenším počtom hrán.

Hint 7. Indukcia, odoberte víťaza (alebo loosera).

Hint 8. Indukcia…, pozrite sa či bol poslaný list na každý ostrov alebo nie.

Hint 9. Je to 8, indukcia vzhľadom na 51.

Hint 10. Indukcia na súčet kapacít hrán - znižujte ho, až kým zo žiadneho mesta nevychádzajú dve cesty rovnakej kapacity. Potom to je triviálne.

Hint 11. Uvažujte ako vyzerajú neremízové trojice. Zrátajte ich pomocou jedného hráča.

Hint 12. Pozerajte sa ako môžu vyzerať hrany medzi nejakou štvoricou vrcholov, využite tvrdenie zo začiatku a proste to spočítajte.

Hint 13. Skúmajte trojice a pomocou kopírovania dokážte, že nemôže nastať situácia, že sa poznajú práve dve z nich. Potom to už je len nejaká ľahká nerovnosť.

Hint 14. Je to $n+1$. Prepdokladajte, že špehov rozdelíte do k izieb. Generálov dajte najprv každého zvlášť, a potom postupne z každej izby špehov dajte zodpovedajúceho generála do izby s nejakým z predošlých izieb.

Hint 15. Nech je to chromatické číslo k, pre každý vrchol definujte k-ticu čísel, Dirichlet. Konštrukcia je indukciou :)

Hint 16. Proste si zoberte jeden vrchol, a hrany rovnakej farby čo z neho idú. Na konštrukciu využite trocha teórie čísel a položte $n = p + 1$

Hint 17. (Skoro) všetky môžu byť. Pre párne to zostrojte indukciou (dávno tu nebola, že?) a pre nepárne proste pridajte jeden vrchol

Hint 18. Áno, som trápny ale nemohol som si dovoliť vynechať túto úlohu pri farbeniach grafu. Ak si ešte stále prekvapený, čo robí táto úloha pri farbeniach tak sa pozeraj čo sa deje s $\chi(G)$. (Shortlist 2013)

Hint 19. Zoberte čo najviac hrán s G tak aby tvorili bipartitný podgraf. Ukážte, že aj to zvyšné hrany tvoria bipartitný podgraf. Potom to už je.

Hint 20. Uvažujte najdlhšiu kružnicu v grafe.

Hint 21. Otvorte okruh na jednom konci - dostanete cestu a nie kružnicu cez všetky vrcholy. Viete ju nejako ľahko zmeniť na inú cestu cez všetky vrcholy? Meňte ju tak, že nemeníte prvú cestu, po ktorej ste šli. Koľkými spôsobmi to viete urobiť? Toto opakujte, až kým nenarazíte na cestu, ktorú viete uzatvoriť :)

Hint 22. Interpretujte tú hru ako operácie na nejakom grafe. Potom by to už malo byť triviálne.

Hint 23. $k = 6$ Proste postupne pridávajte študentov… Na to, že $k < 7$ nájdite proti príklad na 10 vrcholoch, najjednoduchšie symetrický.

Hint 24. $k = 2n + 1$. Zoberte matematika, ktorý pozná najviac matematikov z nejakej jednej krajiny.
Hint 25. výsledný graf bude súvislý a nebude bipartitný
Hint 26. Vedeli ste, že počet hrán v podgrafe je menší rovný ako počet hrán v celom grafe? No najprv odhadnite počet hrán pomocou vrcholov. Pomocou toho počet trojuholníkov od počtu hrán (zapíšte ich ako nejaký súčet) a potom už analogicky z toho odvoďte to, čo chcete. A nezabudnite, čo som sa pýtal na začiatku. A áno "rovnosť" nastáva pre nekonečný kompletný graf.
Hint 27. Nevedel som riešenie pred 6 rokmi a neviem ho ani teraz, ale možno na to do sústredka prídem.

Špirálna podobnosť

Patrik Bak

Abstrakt. Príspevok sa zaoberá užitočnou technikou na riešenie geometrických úloh, špirálnou podobnosťou. Obsahuje 27 úloh na precvičenie všetkých obtiažností.

Úvod

Špirálna podobnosť je geometrické zobrazenie, ktoré je zložením otočenia a rovnoľahlosti. Je určená stredom O, orientovaným uhlom otočenia ϕ a koeficientom rovnoľahlosti $k > 0$. Zvykne sa označovať $S(O, k, \phi)$.

Špeciálne prípady.

- Ak $\phi = 0°$, dostávame rovnoľahlosť s kofeicientom k.
- Ak $\phi = 180°$, dostávame rovnoľahlosť s kofeicientom $-k$.
- Ak $k = 1$, dostávame otočenie dané uhlom ϕ.

Tvrdenie. Nech A, B, C, D sú body v rovine také, že $AC \nparallel BD$ a $AB \not\equiv CD$. Nech sa priamky AC a BD pretínajú v X. Nech sa kružnice opísané trojuholníkom ABX a CDX pretínajú znova v O. Potom S je stred jednoznačnej špirálnej podobnosti, ktorá zobrazuje AB na CD.

Špeciálne prípady.

- Ak $A \in CD$ a $A \not\equiv D$, tak stred špirálnej podobnosti zobrazúcej AB na CA je bod S ležiaci na kružnici opísanej trojuholníku BAD taký, že kružnica opísaná trojuholníku CSD sa dotýka priamky BD.
- Ak $A \equiv D$, tak stred špirálnej podobnosti zobrazúcej AB na CA je bod O taký, že kružnica opísaná trojuhlníku COA sa dotýka priamky BA a kružnica opísaná trojuholníku BOA sa dotýka AC.

Tvrdenie. Nech špirálna podobnosť so stredom O prevádza AB na CD. Potom O je tiež stred špirálnej podobnosti, ktorá prevádza AC na BD.

Tvrdenie. Je daná špirálna podobnosť $S(O, k, \phi)$ taká, že $180° > \phi > 0°$. Potom všetky trojuholníky OXX' sú si navzájom podobné, kde X je ľubovoľný bod roviny rôzny od O a X' je obraz bodu X v S.

Tvrdenie. Je daný štvoruholník $ABCD$ s nerovnobežnými stranami. Nech sa dvojice priamok AB, CD resp. AD, BC pretínajú v bodoch P, Q. Potom kružnice opísané trojuholníkom PAD, PBC, QDC, QAB prechádzajú jedným bodom. Tento bod sa nazýva it vonkajší Miquelov bod štvoruholníka $ABCD$.

Úlohy

Cvičenie 1. Buď AB tětiva kružnice k a S její střed. Vedeme bodem S libovolné další dvě tětivy této kružnice – KL a MN, aby KM nebylo rovnoběžné s AB. Průsečíky přímky AB s přímkami KM, LN označme postupně X, Y. Dokažte, že S je středem XY. (Butterfly Theorem)

Cvičenie 2. Kružnice k, l sa pretínajú v bodoch A, B. Bodom A sa otáča priamka, ktorá pretína kružnicu k znova v bode K a kružnicu l znova v bode L. Akú množinu vykresľuje stred úsečky KL? A čo množina bodov N ležiacich na KL takých, že $KN = 2 \cdot NL$?

Cvičenie 3. Po troch rôznobežných priamkach sa rovnomerne pohybujú boy A, B, C. Dokážte, že ak sú v dvoch rôznych časoch trojuholníky ABC podobné, tak potom sú podobné v každom okamžiku.

Cvičenie 4. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme M_1 a M_2 stredy špirálnych podobností, ktoré zobrazujú AB na CD resp. AC na DB (zvané aj ako it vnútorné Miquelove body). Pre každý z týchto stredov nájdite 4 kružnice prechádzajúce vrcholmi A, B, C, D a jedným z priesečníkov priamok AB, CD, AC, BD alebo AD, BD.

Cvičenie 5. V rovine sú dané štvorce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ značené proti smeru hodinových ručičiek. Označme A_1 stred úsečky AA', B_1, C_1, D_1 analogicky. Dokážte, že $A_1B_1C_1D_1$ je štvorec.

Cvičenie 6. Štvorce $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$ reprezentujú mapy rovnakej oblasti, nakreslené v rôznych mierkach, ležiacich jeden na druhej. Dokážte, že existuje práve jeden bod O na menšej mape, ktorý leží presne nad bodom O_1 na väčšej mape tak, že body O a O_1 reprezentujú rovnaký bod krajiny. Taktiež popíšte konštrukciu tohto bodu pomocou pravítka a kružidla. (USAMO 1978)

Cvičenie 7. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Dokážte, že päty kolmíc z D postupne na priamky AB, AC, BC ležia na priamke. Táto priamka sa nazýva it Simsonova vzhľadom k trojuholníku ABC k bodu D.

Cvičenie 8. V trojuholníku ABC platí $\angle BAC = 60°$. Bod O leží vnútri ABC tak, že $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$. Body D, E sú stredy strán AB, AC. Dokážte, že body A, D, O, E ležia na kružnici. (1996 St. Petersburg MO)

Cvičenie 9. Nech ABC je ostrouhlný trojuholník s výškou AD. Body X, Y ležia po rade na kružniciach opísanýh trojuholníkom ABD, ACD tak, že X, D, Y ležia na priamke a $X \not\equiv D$, $Y \not\equiv B$. Označme ďalej M stred stany BC a M' stred úsečky XY. Dokážte, že priamky MM' a AM' sú na seba kolmé. (PraSe 27-3-8)

Cvičenie 10. Je daný trojuholník ABC. Označme D druhý priesečník kružnice, ktorá sa dotýka strany AB v bode A a prechádza bodom C a kružnice, ktorá sa dotýka strany AC v bode A a prechádza bodom B. Označme E ten bod polpriamky

AB, pre ktorý $AE = 2AB$ a F ten bod polpriamky CA, pre ktorý $CF = 2CA$. Dokážte, že A, D, E, F ležia na jednej kružnici. (Turecko 1998)

Cvičenie 11. Je daný trojuholník ABC. Mimo neho zostrojíme obdlžníky $ABKL$ a $ACMN$ tak, že $BK = AC$ a $CM = AB$. Dokážte, že priamky BN, CL a KM prechádzajú jedným bodom. (TRiKS 5.)

Cvičenie 12. Trojuholník ABC je rovnostranný. M je bod na strane AB a P je bod na strane CB tak, že $MP \parallel AC$. D je ťažisko MBP a E je stred PA. Nájdite uhly trojuholníka DEC. (ARO 1980)

Cvičenie 13. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník a E, F nech sú body na stranách AD,BC také, že $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Polpriamka FE pretína polpriamky BA a CD v S a T. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom SAE, SBF, TCF a TDE prechádzajú spoločným bodom. (USAMO 2006)

Cvičenie 14. Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ a $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Uhlopriečky BD a CE sa pretínajú v P. Dokážte, že priamka AP rozpoľuje stranu CD. (ISL 2006)

Cvičenie 15. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom O. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v P. Kružnice opísané trojuholníkom ABP a CDP sa pretínajú v bodoch P a Q. Predpokladajme, že O, P a Q sú rôzne body. Dokážte, že $\angle OQP = 90°$. (China 1992)

Cvičenie 16. Nech $ABCD$ je daný konvexný štvoruholník s rovnako dlhými nerovnobežnými stranami BC a AD. Nech E, F sú vnútorné body strán BC a AD také, že $BE = DF$. Priamky AC a BD sa pretínajú v P, priamky BD a EF v Q a priamky EF a AC v R. Uvážme všetky trojuholníky PQR pri meniacej sa polohe bodov E, F. Dokážte, že kružnice opísané týmto trojuhlníkom majú spoločný bod rôzny od P. (IMO 2005)

Cvičenie 17. Nech $ABA'B'$ je konvexný štvoruholník, v ktorom sa AA' pretína s BB' v S. Nech T je druhý priesečník kružníc ABS a $A'B'S$. Nech C, C' sú body na úsečkach AB, $A'B'$. Nech K a L sú body na úečkach SB a SA' také, že K, B, C, T sú na kružnici a $A'C', T, L$ tiež. Dokážte, že body C, C', K, L sú kolineárne práve vtedy, keď $\frac{CA}{BC} = \frac{C'A'}{C'B'}$. (Morocco TST 2015)

Cvičenie 18. Kružnice S_1 a S_2 sa pretínajú v bodoch P a Q. Rôzne body A_1, B_1 (rôzne aj od P a Q) sú zvolené na S_1. Priamky A_1P, B_1P pretínajú S_2 znova v A_2, B_2 a priamky A_1B_1, A_2B_2 sa pretínajú v C. Dokážte, že s meniacimi sa bodmi A_1, B_1, stredy kružníc opísaných trojuholníkom A_1A_2C ležia na fixnej kružnici. (ISL 2002)

Cvičenie 19. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $\angle ABC = \angle ADC = 135°$. Na polpriamkach AB, AD sú postupne zvolené body M, N také, že $\angle MCD = \angle NCB = 90°$. Kružnice opísané trojuholníkom AMN a ABD sa druhýkrát pretnú v bode $K \not\equiv A$. Dokážte, že priamky AK a KC sú navzájom kolmé. (CPS 2014)

Cvičenie 20. Body P, Q ležia na uhlopriečkach AC a BD štvoruholníka $ABCD$ tak, že $\frac{AP}{AC} + \frac{BQ}{BD} = 1$. Priamka PQ pretína strany AD a BC v bodoch M a N. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AMP, BNQ, DMQ, a CNP majú spoločný bod. (Bulgarian TST 2004)

Cvičenie 21. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v P. Nech O_1 a O_2 sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom APD a BPC. Nech M, N a O sú stredy AC, BD a O_1O_2. Dokážte, že O je stred kružnice opísanej trojuholníku MPN.

Cvičenie 22. K stranám konvexného štvoruholníka $ABCD$ pripíšeme zvonku podobné trojuholníky ABW, BCX, CDY, DAZ. Dokážte, že $WXYZ$ je rovnobežník.

Cvičenie 23. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ sú uhlopriečky rovnako dlhé. Dokážte, že ak zvonku každej strany pripíšeme rovnostranný trojuholník, tak spojnice dopísaných vrcholov týchto trojuholníkov sú na seba kolmé. (ISL 1992)

Cvičenie 24. V ostrouhlon trojuholníku ABC, úsečky AD, BE, CF sú výšky a H je ortocentrum. Kružnica ω, so stredom v O, prechádza bodmi A, H a pretína strany AB,AC znova v Q, P. Nech sa kružnica opísaná trojuholníku OPQ dotýka BC v R. Dokážte, že $\frac{CR}{BR} = \frac{ED}{FD}$. (USA TST 2006)

Cvičenie 25. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $AB \nparallel CD$ a nech X je bod vnútri $ABCD$ taký, že $\angle ADX = \angle BCX < 90°$ a $\angle DAX = \angle CBX < 90°$. Ak sa osi úsečiek AB a CD pretínajú v bode Y, tak dokážte, že $\angle AYB = 2\angle ADX$. (ISL 2000)

Cvičenie 26. Body A_1, B_1 a C_1 sú zvolené na stranách BC, CA a AB trojuholníka ABC. Kružnice opísané trojuholníkom AB_1C_1, BC_1A_1 a CA_1B_1 pretínajú kružnicu opísanú trojuholníka ABC znova v bodoch A_2, B_2 a C_2. Body A_3, B_3 a C_3 sú obrazy A_1, B_1 a C_1 v stredových súmernostiach podľa stredov strán BC, CA a AB. Dokážte, že trojuholníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ sú podobné. (ISL 2006)

Cvičenie 27. Nech $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ sú trojuholníky také, že A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sa pretínajú v bode S. Nech C_3 je stred špirálnej podobnosti, ktorá zobrazuje A_1B_1 na A_2B_2. Analogicky definujeme A_3 a B_3. Dokážte, že body A_3, B_3, C_3, S ležia na kružnici.

Cvičenie 28. Nech ABC je trojuholník s kružniciou opísanou k a P nech je ľubovoľný bod. Priamky PA, PB, PC pretínajú k znova v bodoch D, E, F. Trojuholník XYZ je obraz trojuholníka DEF v špirálnej podobnosti so stredom v bode P. Priamky prechádzajúce X, Y, Z a kolmé na PA, PB, PC pretínajú BC, CA, AB v boddoch K, L, M. Dokážte, že body K, L, M ležia na jednej priamke.

Prvé hinty

Hint 1. (projektivní) BÚNO AB je průměr (je třeba si zachovat poměry na této přímce).
Hint 2. Všimnime si, že všetky trojuholníky BKL sú si podobné. Použitie tvrdenie 3. Iná možnosť je nakresliť si tam ešte inú úsečku K', L' a pozrieť sa, akú konfiguráciu to máme.
Hint 3. Označme trojuholníky v tých okamihoch ako ABC, $A'B'C'$. Uvážte stred O špriálnej podobnosti, ktorá zobrazuje ABC na $A'B'C'$.
Hint 4. Skombinujte tvrdenia 1 a 2 rovnako ako pri dôkaze tvrdenia 4.
Hint 5. Uvážme stred O špriálnej podobnosti, ktorá tieto štvorce na seba prevádza.
Hint 6. Nie je hľadaný bod stredom špirálnej podobnosti prevádzajúcej tieto štvorce na seba? Nezabudnite si rozmyslieť, kde leží.
Hint 7. Uvážte na AC bod S taký, že $DAP \sim DSQ \sim DCR$.
Hint 8. Podobá sa na to na známu konfiguráciu. Cez úsekový uhol nahliadnite, že je to naozaj ona.
Hint 9. Známa konfigurácia. A je stredom špirálnej podobnosti, ktorá na seba všeličo zobrazuje. Ako to spojiť so stredmi BC a XY?
Hint 10. Máme známu konfiguráciu, D je stred špirálnej podobnosti zobrazujúcej AB na CA. Čo ešte kam zobrazuje?
Hint 11. Všimnine si, že bod A je stredom špirálnej podobnosti, ktorá na seba prevádza uvažované podobné obdlžníky. Spomeňte si, ako sa konštruuje.
Hint 12. Očividne si musíme dodefinovať nejaké tie body. Uvážme stredy BP a MP, ozn. ich napr. Q, R. Zrejme sú koolineárne s E. Skúste z nich niečo vykúzliť.
Hint 13. Nie je ten spoločný bod náhodou stred nejakej špirálnej podobnosti? Skúste uvážiť tú vhodnú, ktorá využije najviac informácií zo zadania.
Hint 14. Všimnite si, že A je stredom nejakej (nie jednej) špirálnej podobnosti. Ako by ste spätne zostrojili stred vhodnej z nich?
Hint 15. Q je zjavne stred istých špirálnych podobností. To by sme chceli využiť. Uvážte na AD, BC také body, aby to pripomínalo už videné konfigurácie a samozrejme, aby tieto body mali niečo spoločné s O.
Hint 16. Nie je ten spoločný bod náhodou stred nejakej špirálnej podobnosti? Zamyslite sa nad touto možnosťou s prihladnutím na fakt, že A, F, D ležia na priamke v rovnakom pomere ako C, E, B.
Hint 17. T je stred určitej špirálnej podobnosti. Tá generuje podobné trojuholníky.
Hint 18. Pozrite sa dobre na obrázok. Nie je Q náhodou nejaký Miquelov bod? Čo z toho plynie? Skúste zjednodušiť úlohu o nejaké body.
Hint 19. Úloha sa podobá na chcenú konfiguráciu, ale nie je to ono. Skúste niečo definovať na priamkach AD a AB.
Hint 20. Takto napísaná podmienka nič nehovorí. Skúste sa s ňou pohrať, až kým nedostanete tvar, ktorý vám niečo napovie.
Hint 21. Kde sa pretínajú kružnice opísané trojuholníkom APD a BPC, o ktorých stredoch sa v tejto úlohe bavíme? Nie je to náhodou stred nejakej špirálnej podobnosti? Skúste z toho vyťažiť vhodné podobné trojuholníky.
Hint 22. Dokázať, že štvoruholník je rovnobežník možno napríklad tak, že ukážeme, že uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú. Uvážme preto ich stredy. Čo ďalšie sa teraz hodí uvážiť?

Hint 23. Uvážte stred vhodnej špirálnej podobnosti, ktorá nám umožní „spojiť" trojuholníky z opačných strán. Najlepšie tak, aby sme vedeli využiť $AC = BD$.

Hint 24. Nakreslite si dobrý obrázok. Aj keď sa to nezdá, táto konfigurácia je veľmi bohatá. Významnú úlohu zdá sa hrá istá špirálna podobnosť so stredom v bode H. Zamyslite sa nad obrazom bodov R, Q, O, P.

Hint 25. Trojuholníky XAD, XCB sú podobné, ale nie tak, aby šla použiť priamo špirálna podobnosť. Nič nie je stratené. Zobrazte bod X osovo podľa BC. Zrazu máme trojuholníky XAD, $X'BC$ podobné a správne orientované. Označte T špirálnu podobnosť, ktorá prevádza jeden na druhý. Čo možno povedať o stredoch odpovedajúcich úsečiek? Nezabudnite, že rovnaký argument funguje aj na opačnej strane.

Hint 26. Nakreslite si bod A hore. Bod A_2 je zjavne stred akejsi špirálnej podobnosti. Tá generuje podobné trojuholníky. Skúste napísať také podobnosti, aby ste z nich niečo odvodili o C_3, B_3.

Druhé hinty

Hint 2. Nakoľko trojuhlníky BKL sú si podobné, tak aj trojuholníky BKN sú si podobné. Interpretujte N ako obraz bodu K v špirálnej podobnosti so stredom B.

Hint 3. Odvoďte, že pre každý iný trojuholník spĺňajúci podmienky zo zadania existuje špirálna podobnosť so stredom v bode O, ktorá zobrazuje ABC na tento trojuholník.

Hint 4. Rovnaký ako hint 1.

Hint 5. Odvoďte, že existuje špirálna podobnosť so stredom v O, ktorá prevádza body A, B, C, D na A_1, B_1, C_1, D_1.

Hint 6. Rovnaký ako hint 1.

Hint 7. Špirálna podobnosť so stredom D zobrazuje $A - S - C$ na $P - Q - R$.

Hint 8. Body B, M, A ležia na priamke v rovnakom pomere A, N, C. Špirálna podobnosť to dokončí.

Hint 9. Zo špirálnej podobnosti odvoďte $\triangle AMM' \sim \triangle ABX$.

Hint 10. Body E, B, A ležia na priamke v rovnakom pomere ako F, A, C. Špirálna podobnosť dá vhodné podobné trojuholníky, ktoré dajú vhodné uhly.

Hint 11. Z toho, ako sa konštruuje dostaneme v podstate to, že kružnice opísané uvažovaným obdĺžnikom sa pretínajú tam, kde priamky BN a CN. Koniec je potom triviálny.

Hint 12. Zrejme DBP a DQR sú špirálovo podobné. Dokážte, že body B, P, C a Q, R, E ležia na priamkach v rovnakých pomeroch. Ďalej rutinne ukážte, že CED je podobný ss nejakým trojuholník so známymi uhlami.

Hint 13. Máme tam body A, E, D na priamke v rovnakom pomere ako B, F, C. Má teda zmysel uvažovať stred špirálnej podobnosti prevádzajúcej A, E, D na B, F, C. Ostáva vypísať kružnice, ktoré ním prechádzajú.

Hint 14. Štvoruholníky $ABCP$, $AEDP$ sú vďaka špirálnej podobnosti tetivové. Dokončte pomocou mocnosti z priesečníku AP a CD ku kružniciam im opísaným.

Hint 15. Kľúčové body sú samozrejme stredy úsečiek AD, BC. Ležia v rovnakom pomere na týchto úsečkách a navyše ležia na kružnici s bodmi O, P.

Hint 16. Uvážme stred tejto podobnosti spomenutej v hinte 1. Vypíšte kružnice, ktoré ním prechádzajú z konštrukcie stredu. Potom z faktu, že je to Miquelov bod nejakých štvoruholníkov ukážte, že leží aj na ten správnej kružnici.

Hint 17. Ak ten pomer platí, tak vďaka špirálnej podobnosti máme napríklad $TAA' \sim TCC'$. S týmto a spolu s kružnicami ľahko vyuhlíme kolinearitu. Podobne pri opačnej implikácií.

Hint 18. Kružnica opísaná A_1A_2C prechádza cez Q. Stačí dokázať, že s pohybovaním bodu A_1 po S_1 sa stred kružnice opísanej A_1QA_2 pohybuje po kružnici. V tejto úlohe už nemáme body B_1, B_2, C. To už musí padnúť :)

Hint 19. Chcené body sú projekcie C na AD a AB. Vtedy stačí dokázať, že kružnica opísaná týmto projekciám a bodom A, C sa pretína s kružnicami opísanými AMN a ABD. Dokážte potrebné pomery a použite argument so špirálnou podobnosťou.

Hint 20. Podmienka je ekvivalentná s $\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QR}$. Dáva preto zmysel definovať stred T špirálnej podobnosti, ktorá zobrazuje A, P, C na D, Q, R. Teraz už len vypíšte kružnice, na ktorých leží T.

Hint 21. Nech je priesečník spomenutý v hinte 1 bod T. Bod T je okrem iného stred špirálnej podobnosti, ktorá zobrazuje O_1D na O_2B. Čo to znamená pre stredy O_1O_2 a DB?
Hint 22. Uvážte aj stredy uhlopriečok $ABCD$ a skúste použiť ideu z úlohy 3.
Hint 23. Nech O_1 a O_2 sú vrcholy trojuholníkov nad AB a CD. Uvažujte podobnosť prevádzajúcu AB na CD, so stredom S. Tá prevádza AO_1B na CO_2D. Taktiež SO_1 je kolmé na AB, analogicky SO_2 na CD. Nevidno z toho, že spojnica stredom AB a CD je rovnobežná s O_1O_2? Ako to využiť?
Hint 24. Uvažujeme špirálnu podobnosť, ktorá zobrazuje Q na F. Rozmyslite si, že zobrazuje O na stred AH, P na E. Tieto body ležia na kružnici (kružnica deviatich bodov). Bod R teda musí zobraziť na túto kružnicu. Dokážte, že týmto obrazom je D. Týmto dáte zmysel divnému bodu R, ale stále treba skúmať ďalej.
Hint 25. Podľa predošlého hintu má zmysel definovať stredy AB, CD ako P, Q a projekcie X na BC, AD (čo sú zrejme stredy príslušných úsečiek XX'. Vďaka špirálnej podobnosti potom trojuholníky QRP, DXA sú podobné, rovnako ako QSP, CXB. Takže sú všetky navzájom podobné, takže trojuholníky QSP, QRP sú dokonca zhodné. Zrejme $\angle SQR = 2\angle ADX$. Nutne musí platiť $\triangle QSR \sim \triangle YAB$. Toto je posledná netriviálna vec, ktorú stačí nahliadnuť. Samozrejme cez špirálnu podobnosť :)
Hint 26. Cieľ je ukázať $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle AC_3B_3$. Takto budeme vedieť preniesť napohľad divné uhly trojuholníka $A_3B_3C_3$ na kružnici. Zvyšok je uhlenie.

Dvě techniky na nerovnosti

Matěj Konečný

Abstrakt. Ačkoli v posledních letech nerovností v olympiádách ubývá, stále je potřeba umět si s nerovnostmi poradit. V tomto příspěvku se stručně podíváme na Jensenovu nerovnost a potom si ukážeme netradiční způsob, jak zapisovat roznásobenné homogenní polynomiální výrazy, který se velmi hodí na Muirheada a Schura.

Jensenova nerovnost

Definice. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce. Potom říkáme, že f je na I *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in I$ a $\lambda \in [0,1]$ platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Pokud platí opačná nerovnost, říkáme, že je f na I *konkávní*, pokud nerovnost platí ostře, říkáme, že f je *ryze* konvexní (konkávní).

Například kvadratická funkce je na celém svém definičním oboru ryze konvexní, logaritmus ryze konkávní. Funkce $y = \frac{1}{x}$ je na $(-\infty, 0)$ ryze konkávní a na $(0, \infty)$ ryze konvexní.

Věta (Jensenova nerovnost). Nechť f je funkce konvexní na intervalu I. Pak pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ taková, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n),$$

přičemž je-li f ryze konvexní, rovnost nastává pouze pokud *je daná konvexní kombinace triviální*, tzn. všechny x_i, jejichž λ_i jsou nenulové, se rovnají.

Pro konkávní funkci platí nerovnost obráceně.

Cvičení 1. Dokažte AG nerovnost.

Jensenova nerovnost je překvapivě silná zbraň. Typicky se používá na zbavení se odmocnin, logaritmů či lomených funkcí, velmi užitečná je například na nerovnosti, kde je zadána nějaká podmínka na součet proměnných, ale v nerovnosti se vyskytuje součet výrazů $f(x)$, kde f je nějaká funkce.

Pro využití Jensena je třeba umět určit, zda je nějaká funkce konvexní či konkávní. Samozřejmě to můžeme dokázat z definice, což bývá ale poněkud nepraktické. Pokud umíte derivovat, tak platí, že funkce je v bodě konvexní, pokud je tam její druhá derivace kladná (a konkávní, pokud je tam druhá derivace záporná). U standardních funkcí ale stačí bez důkazu zmínit, že je daná funkce na daném intervalu taková a maková.

Cvičení (Jensen)

Cvičení 2. Buďte $a, b, c > 0$ taková, že $a + b + c = 1$. Najděte minimum

$$\sum_{cyc} \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10}.$$

Cvičení 3. Dokažte, že úhly v trojúhelníku α, β, γ splňují

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cvičení 4. Pro kladná reálná a, b, c dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Cvičení 5. Pro nezáporná reálná a, b dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost. (MO A63–III–6)

Cvičení 6. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2 + 2(b^2 + c^2) + (b+c)^2} \leq (a+b+c)^2.$$

Cvičení 7. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Cvičení 8. Dokažte Hölderovu nerovnost, tzn. pro $p, q >$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $a_1, \ldots, a_n$, $b_1 \ldots, b_n$ reálná platí

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chinese Dumbass Notation

Na nerovnosti existuje veliké množství technik, které dávají krátké a elegantní řešení. Toto není jedna z nich. Chinese Dumbass Notation (CDN) je šikovný způsob, jak zapisovat roznásobené **homogenní** polynomy ve třech proměnných. Takhle by například vypadala CND výrazu $\sum_{sym} 8a^3b + \sum_{sym} 10a^2b^2 + \sum_{sym} 14a^2bc$:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & 8 & & 8 & & & \\ & & 20 & & 28 & & 20 & & \\ & 8 & & 28 & & 28 & & 8 & \\ 0 & & 8 & & 20 & & 8 & & 0 \end{array}\right)$$

Obecně je polynom stupně d reprezentován trojúhelníkem o délce strany $d+1$ a koeficient výrazu $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ leží na barycentrických souřadnicích (α, β, γ):

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & [a^4] & & & & \\ & & & [a^3b] & & [a^3c] & & & \\ & & [a^2b^2] & & [a^2bc] & & [a^2c] & & \\ & [ab^3] & & [ab^2c] & & [abc^2] & & [ac^3] & \\ [b^4] & & [b^3c] & & [b^2c^2] & & [bc^3] & & [c^4] \end{array}\right)$$

Součet a rozdíl trojúhelníků se dělá po složkách (ale samozřejmě musí být stejného stupně).

Cvičení 9. Jak se dva CDN trojúhelníky násobí?

Cvičení 10. Převeďte do CDN

- $(x+y+z)^3$
- $x^3+y^3+z^3$
- xyz
- $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$
- $(x+y+z)(xy+yz+zx)$
- $(x+y)(y+z)(z+x)$

Cvičení 11. Dokažte

$$\sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc}(x+y)^3 = 3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

Cvičení 12. Zjednodušte

$$(x+y+z)^3 - \sum_{cyc}(x+y-z)^3.$$

Nerovnosti s CDN

Chceme-li dokázat nerovnost $A \geq B$, často ji budeme převádět na $A - B \geq 0$ a dokazovat tu.

Například úplně základní AG nerovnost ve tvaru $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ je v CDN reprezentována jako

$$\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & -2 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Všimněte si, že AG přemístí dvě čísla do jejich těžiště. Takže podle váženého AG platí například

$$\begin{pmatrix} & & & & 0 & & & & \\ & & & \frac{2}{3} & & 0 & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \frac{1}{3} & & 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} & & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \\ & & 0 & & 1 & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

A zkombinováním několika takových AGček dostaneme

$$\begin{pmatrix} & & & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} & & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \\ & & 0 & & 2 & & 0 & & \\ & 0 & & 2 & & 2 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

Definice. Buď $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ a $x, y, z \in \mathbb{R}$. Potom výraz

$$\sum_{sym} x^a y^b z^c$$

budeme zapisovat jako $[a, b, c]$, přičemž $a \geq b \geq c$ (je to symetrická suma).

Věta (Muirheadova nerovnost). Nechť $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{N}_0$ taková, že $a+b+c = a' + b' + c'$. Potom $[a, b, c] \geq [a', b', c']$ platí pro nezáporná x, y, z právě tehdy, když $a \geq a'$ a zároveň $a + b \geq a' + b'$.

Můžeme si všimnout, že poslední dumbassená nerovnost nebyla nic jiného než *Muirhead* pro $[3, 1, 0] \geq [2, 1, 1]$.

Muirhead v CDN umí (symetricky) přeuspořádat čísla tak, že se posunou směrem dovnitř a jejich součet a těžiště se zachovají.

Cvičení 13. Pro kladná x, y, z dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}.$$

Věta (Schurova nerovnost). Pro nezáporná x, y, z a kladná α, β platí

$$\sum_{cyc} x^{\alpha}\left(x^{\beta}-y^{\beta}\right)\left(x^{\beta}-z^{\beta}\right) \geq 0.$$

Rovnost nastává pro $x=y=z$ a $(x=0, y=z)_{cyc}$.

Pro $\alpha=2, \beta=1$ vypadá Schur následovně:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & -1 & & -1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 0 & & \\
 & -1 & & 1 & & 1 & & -1 & \\
1 & & -1 & & 0 & & -1 & & 1
\end{array}\right) \geq 0$$

Cvičení 14. Jak se projevují parametry α a β v CDN zápisu?

Cvičení (CDN)

Cvičení 15. Dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Cvičení 16. Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ taková, že

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c.$$

Dokažte, že

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Cvičení 17. Pro $a+b+c=1$ dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{1+a}{1-a} \leq \sum_{cyc} \frac{2a}{b}.$$

(Japonsko TST 2004)

Cvičení 18. Pro $a+b+c=1$ dokažte

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right) \geq 64.$$

Cvičení 19. Pro $a+b+c=3$ dokažte

$$a^2+b^2+c^2+abc \geq 4.$$

(Rumunsko)

Cvičení 20. Pro $a+b+c=1$ dokažte
$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}.$$

(Mildorf)

Cvičení 21. Pro $a+b+c=1$ dokažte
$$5\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 6\left(a^3+b^3+c^3+1\right).$$

(IMO 2016)

Cvičení 22.
$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2+\frac{2\,(x+y+z)}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}$$

(APMO 1998)

Cvičení 23. Pro $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ takové, že $a^2+b^2+c^2=1$ dokažte
$$\sum_{cyc} \frac{1}{1-ab} \leq \frac{9}{2}.$$

Cvičení 24. Pro $abc=1$ dokažte
$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+a+1} \geq 1.$$

(Secrets in Inequalities)

Cvičení 25. Pro $xy+yz+zx+2xyz=1$ dokažte
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 4(x+y+z).$$

(Problems from the Book)

Literatura a zdroje

[1] Brian Hamrick, *The Art of Dumbassing*
`https://www.tjhsst.edu/~2010bhamrick/files/dumbassing.pdf`

[2] Daniel S. Liu, *Using Chinese Dumbass Notation to Find Algebraic Identities*
`https://www.academia.edu/11576181/Using_Chinese_Dumbass_Notation_to_Find_Algebraic_Identities`

[3] Farrell Eldrian Wu, *Triangular Polynomial Notation*
`https://www.overleaf.com/articles/triangular-polynomial-notation/zpskcfqygqzx`

[4] Michal Rolínek a Pavel Šalom, *Zdolávání nerovností*
`http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~paves/serial/Zdolavani_nerovnosti.pdf`

Hinty

Hint 2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ je na $[0,1]$ ryze konvexní.
Hint 3. sin je na $(0,\pi)$ ryze konkávní.
Hint 4. Dostaňte tam dobré koeficienty (nerovnost je homogenní ;)), pak použijte Jensena na konvexní funkci $\frac{1}{\sqrt{x}}$ a dál už si iKSkař určitě poradí.
Hint 5. Vydělte obě strany $a+b$ a pak Jensen na $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Bacha na nuly!
Hint 6. Vydělte obě strany $a+b+c$. Na konci budete muset trochu zatnout zuby (nebo si zadumbassit).
Hint 7. Nerovnost je homogenní, tak si zkuste vymyslet nějakou šikovnou podmínku, která vám navíc ještě prozradí šikovnou funkci. Tu dvakrát zderivujte a ověřte si, že je fakt konvexní.
Hint 8. Definujte $x_i = \frac{a_i^p}{\sum_i a_i^p}$ a y_i analogicky, vydělte nerovnost pravou stranou a pak to odhadněte po složkách.
Hint 15. Roznásobte, odečtěte, Schur, AG.
Hint 16. Zbavte se zlomků v podmínce, chytře homogenizujte nerovnost (jsou 2 možnosti), roznásobte ji, odečtěte pravou stranu a pak vykoukejte Muirheada.
Hint 23. Vyměňte všechny jedničky za podmínku. Pak roznásobte. Ani AG ani Schur nejsou dostatečně silní na $-5a^5b$ členy, takže zkuste odečíst $\sum_{sym} a^2(a-b)^4 \geq 0$.
Hint 25. Je těžká.

Funkcionálne rovnice

Miroslav Psota

Abstrakt. Na riešenie funkcionálnych rovníc existuje veľké množstvo postupov. My si rozoberieme niektoré z nich.

Popri prednáške

Úloha 1. $f: R \to R$

$$f(y - f(x)) = f(y) - f(f(x)) + f(x) - x$$

Úloha 2. $f: R \to R$

$$f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

Úloha 3. $f: R \to R$, f je prostá

$$f(xf(y) + y^2) + f(x + y) = f(x - y) + f(y^2 + (f(y))^2)$$

Úloha 4. $f: R \to R$

$$f(x^3 - y^3) + f(x + 2y) = f(x^2 + xy + y^2) + 3x$$

Úloha 5. $f: R^+ \to R^+$

$$(1 + yf(x))(1 - yf(x + y)) = 1$$

Úloha 6. Vyrieš vzhľadom na x ak platí $f: R \to R$, $f(f(x)) = x + f(x)$

$$f(f(x)) = 0$$

Úloha 7. $f: R \to R$

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x)$$

Celoštátka

Úloha 8. $f : R^+ \to R^+$

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}$$

Úloha 9. $f : R \to R$

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

Úloha 10. Určte hodnoty parametra $\alpha \in R$, pre ktoré existuje práve jedna funkcia $f : R \to R$, pre ktorú platí

$$f(x^2 + y + f(y)) = f^2(x) + \alpha y$$

Úloha 11. $f : R \to R$

$$f(f(x - y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

Úloha 12. $f : R \to R$, rastúca

$$f(x + y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x)))$$

Dokáž, že $f(f(x)) = x$.

Staré IMO

Úloha 13. $f : R \to R$, $g : R \to R$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y)$$

Funkcia f nie je identicky rovná nule a $|f(x)| \leq 1$ pre všetky $x \in R$. Dokážte, že $|g(x)| \leq 1$ pre všetky $x \in R$.

Úloha 14. $f : R \to R$

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$$

Dokážte, že potom f splňuje $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Úloha 15. $f : Q \to Q$, $f(1) = 2$

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$$

Úloha 16. Nájdite nejakú funkciu $f : Q^+ \to Q^+$ spĺňajúcu

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Hinty

Hint 1. $[x, f(x)]$
Hint 2. $[0, t]$, sústava.
Hint 3. Dosaď nech vypadne $f(xf(y) + y^2)$ a $f(y^2 + (f(y))^2)$
Hint 4. Kedy $x^3 - y^3 = x^2 + xy + y^2$?
Hint 5. Symetria.
Hint 6. Dokáž prostosť.
Hint 7. Kedy je f rovné nule? Dokáž, že f je bijekcia.
Hint 8. $x = 1$, $y = 1$; $x = f(1)$
Hint 9. nepárnosť, zameraj sa na kladné
Hint 10. rozober $\alpha = 0$; dokáž že inak $\alpha = 2$ (využi periodickosť, daj si pozor z čoho vyvodzuješ závery)
Hint 11. $f(x)^2 = x^2$; $f(x) = -x, x \in R^-$
Hint 13. Trojuholníková nerovnosť
Hint 14. $[x, 0]$
Hint 15. Najprv na $\mathbb{Z}$, potom aj $\mathbb{Q}$
Hint 16. Prostosť

Komplexní geometrie

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek pojednává o metodě řešení geometrických úloh v rovině. Výhodou použití komplexních čísel proti klasickým vektorům je interpretace násobení komplexním číslem jako spirální podobnosti v komplexní rovině. Příspěvek uvádí základní vlastnosti komplexních čísel a „překlady“ geometrických pojmů do jejich řeči. Dále uvádí příklady k procvičení techniky.

Zavedení komplexních čísel

Definice. Komplexním číslem rozumíme výraz $a + bi$ pro reálná čísla a, b. Číslo $i = 0 + 1i$ se nazývá imaginární jednotka a splňuje $i^2 = -1$. Na množině komplexních čísel definujeme operace sčítání, odčítání, násobení a dělení následovně:

- $(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)i$,
- $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$,
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$, pokud $c + di \neq 0$.

Tvrzení. Komplexní čísla s takto definovanými operacemi tvoří těleso (asociativita, distributivita, komutativita).

Definice. *Komplexně sdruženým číselm* k číslu $z = a+bi$ rozumíme komplexní číslo $\overline{z} = a - bi$ a jeho absolutní hodnotou (velikostí) reálné číslo $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme *reálnou část* čísla z jako $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ a *imaginární část* čísla z jako $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$.

Tvrzení. (Goniometrický tvar komplexního čísla) Každé nenulové komplexní číslo lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Úhel φ nazýváme *argumentem* komplexního čísla z a značíme $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$.

Tvrzení. (Násobení v goniometrickém tvaru) Platí

$$r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot r_2(\cos\beta + i\sin\beta) = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Důsledek. Platí $(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

Geometrické vlastnosti komplexní roviny

Souvislost komplexních čísel s planimetrií přichází přirozeně z představy Gaussovy roviny. Každému komplexnímu číslu je tak přiřazen právě jeden bod roviny a naopak.

Úmluva. Body budeme značit velkými písmeny a jim odpovídající komplexní čísla malými písmeny.

Tvrzení. Vzdálenost bodů A a B je rovna $|a-b|$.

Tvrzení. Body A, Z, B leží na přímce v daném pořadí, právě když platí $|a-b| = |a-z|+|b-z|$ nebo ekvivalentně $z = ua+(1-u)b,\ u \in [0,1]$.

Tvrzení. Polopřímky XA a XB svírají orientovaný úhel $\angle BXA = \mathrm{Arg}(\frac{a-x}{b-x})$.

Důsledek. Přímky AB a CD jsou rovnoběžné právě když $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$ a kolmé právě když $i\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$.

Tvrzení. Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě když $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \in \mathbb{R}$.

Pozorování. Přičtení čísla $z = a+bi$ odpovídá posunutí o vektor (a,b). Násobení číslem $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odpovídá spirální podobnosti se středem v počátku, úhlem α a koeficientem r.

Úlohy

Úloha 1. Máme vedle sebe tři čtverce $ABFE$, $BCGF$ a $CDHG$. Spočtěte $|\angle BEH|+|\angle CEH|+|\angle DEH|$.

Úloha 2. Ke stranám konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou připsány rovnostranné trojúhelníky tak, že na stranách BC a DA jsou tyto trojúhelníky připsány dovnitř, zatímco na stranách AB a CD jsou připsány ven. Označme vzniklé vrcholy nad stranami AB, BC, CD a DA postupně P, Q, M a N. Dokažte, že $PQMN$ je rovnoběžník. (IMO 1982 – Shortlist)

Úloha 3. Mějme dva čtverce $ABCD$ a $BNMK$, které se neprotínají a označme E střed AN a F patu kolmice z B v trojúhelníku CBK. Dokažte, že body F, B a E leží v přímce.

Úloha 4. Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Označme postupně M, N, P, Q, X a Y středy úseček BC, CD, DE, EA, QN a PM. Dokažte, že $XY \parallel AB$.

Úloha 5. Nechť $|a| = |b| = |c|$. Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníka ABC odpovídá číslu $a+b+c$.

Úloha 6. (van Aubelova věta) Stranám AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$ z vnějšku připíšeme čtverce a jejich středy označíme postupně U, V, X, Y. Ukažte, že úsečky UX a VY jsou na sebe kolmé a jsou stejně dlouhé.

Úloha 7. (Napoleonova věta) Stranám AB, BC, CA z vnějšku připíšeme rovnostranné trojúhelníky. Ukažte, že 3 těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

Úloha 8. (Ptolemaiova věta) Dokažte, že pro každý čtyřúhelník platí $|AC|\cdot|BD| \le |AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|AD|$ a rovnost nastane, právě když je $ABCD$ tětivový.

Úloha 9. Mějme v rovině body A a B a uvažme jednu ze dvou polorovin s hraniční přímkou AB. Pro každý bod C ze zvolené poloroviny sestrojme vně trojúhelníku

ABC čtverce ACD_CE_C a CBF_CG_C. Dokažte, že se všechny přímky E_CF_C (hýbeme-li s bodem C) protínají v jednom bodě. (MKS 29–4–5)

Úloha 10. Let H be the orthocenter of triangle ABC. Let D, E, F lie on the circumcircle of ABC such that $AD \parallel BE \parallel CF$. Let S, T, U respectively denote the reflections of D, E, F across BC, CA, AB. Prove that points S, T, U, H are concyclic.

Úloha 11. Na delším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod P. Označme B' osový obraz bodu B podle přímky AP a dále X, Y, Z postupně středy úseček AB, BP a $B'C$. Určete velikost úhlu XZY.

Úloha 12. Buď ABC libovolný trojúhelník a F střed strany BC. Sestrojme z vnější strany rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ABD a ACE k přeponám AB, AC. Dokažte, že trojúhelník DEF je také rovnoramenný a pravoúhlý.

Úloha 13. On sides AB, BC, CA of a triangle ABC we draw similar triangles ADB, BEC, CFA, having the same orientation. Prove that triangles ABC and DEF have the same centroid.

Úloha 14. Squares $CBQP$ and $ACMN$ are erected outwardly on the sides BC and AC of the triangle ABC. Show that the midpoints D, E of these squares, the midpoint G of AB, and the midpoint F of MP are vertices of a square.

Úloha 15. ABC is a regular triangle. A line parallel to AC intersects AB and BC in M and P, respectively. Point D is the centroid of PMB, E is the midpoint of AP. Find the angles of $\triangle DEC$.

Úloha 16. Let ABO be an equilateral triangle with center $S$and let $A'B'O$ be another equilateral triangle with the same orientation and $S \neq A'$, $S \neq B'$. Consider M and N the midpoints of the segments $A'B$ and AB'. Prove that triangles $SB'M$ and $SA'N$ are similar. (30th IMO ■ Shortlist)

Úloha 17. A trapezoid $ABCD$ is inscribed in a circle of radius $|BC| = |DA| = r$ and center O. Show that the midpoints of the radii OA, OB and the midpoint of the side CD are vertices of a regular triangle.

Úloha 18. OAB and OA_1B_1 are positively oriented regular triangles with a common vertex O. Show that the midpoints of OB, OA_1, and AB_1 are vertices of a regular triangle.

Úloha 19. Spočítejte součin délek všech úhlopříček a stran v pravidelném n-úhelníku, má-li poloměr kružnice opsané roven 1.

Úloha 20. Trojúhelník ABC splňující $|AB| \neq |AC|$ je vepsán do kružnice ω. Tečny vedené bodem A ke kružnici opsané středům jeho stran se jí dotýkají v bodech D, E. Ukažte, že přímka DE, přímka BC a tečna k ω vedená bodem A procházejí jedním bodem.

Úloha 21. Let ABC be an acute triangle with circumcircle Γ. Let ℓ be a tangent line to Γ, and let ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c be the lines obtained by reflecting ℓ in the lines BC,

CA and AB, respectively. Show that the circumcircle of the triangle determined by the lines ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c is tangent to the circle Γ. IMO 2011 - 6

Literatura a zdroje

- seriál MKS o komplexních číslech: https://mks.mff.cuni.cz/archive/30/9.pdf
- Complex Numbers from A to Z, Titu Andreescu, Dorin Andrica, Springer Science & Business Media, 2006
- příspěvek Komplexní čísla geometricky, Mirek Olšák, Mentaurov, 2013

Kruté věty v N (Rado van Švarc)

Abstrakt. V příspěvku probíráme několik těžkých tvrzení z teorie čísel a ukážeme si několik příkladů jejich použití.

Bertrandův postulát

Věta (Betrandův postulát). Pro každé přirozené $n > 1$ existuje prvočíslo p takové, že $n < p < 2n$.

Příklad 1. Ukažte, že pokud p_i je i-té prvočíslo, pak

$$\frac{p_n + p_{n+2}}{p_{n+1}} > \frac{3}{2}$$

Příklad 2. Jako *japné* číslo nazveme takové přirozené n, že kdykoliv pro přirozené m platí $1 < m < n$ a $(m,n) = 1$, pak m je prvočíslo. Nalezněte všechna japná čísla. (Estonsko TST 1997)

Příklad 3. Nalezněte všechna n, pro která je $n!$ druhou mocninou celého čísla.

Příklad 4. Existuje n takové, že kdykoliv $t \geq n$, pak mezi t a t^2 leží alespoň 2016 prvočísel?

Příklad 5. Nechť F_i je i-té Fibonacciho číslo (začínající $F_1 = F_2 = 1$). Nechť

$$a_n = \lfloor \sum_{i=1}^{n} \sqrt{F_i} \rfloor$$

a

$$b_n = \lfloor \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i} \rfloor$$

. Ukaže, že $a_n = b_n$ jen pro konečně mnoho hodnot n.

Příklad 6. Dokažte, že každé přirozené číslo se dá zapsat jako součet navzájem různých nesložených čísel.

Příklad 7. Dokažte, že čísla v množině $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ umíme popárovat tak, že součet každého páru je prvočíslo.

Příklad 8. Nechť

$$a_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{(2i+1)^n}{i}.$$

Ukažte, že a_n nikdy není celé.

Příklad 9. Najděte všechna přirozená n, pro která je počet kladných dělitelů čísla $[1, 2, \dots, n]$ mocninou dvojky. (Estonsko TST 2004)

Příklad 10. Určete všechna přirozená k, pro která existuje nekonečně mnoho přirozených n tak, že

$$n + k \nmid \binom{2n}{n}.$$

(Čína 2015)

Příklad 11. Určete všechna přirozená x, y pro která

$$x! + y! = x^y.$$

(MEMO 2007)

Dirichletova věta

Věta (Dirichletova věta). Pokud a je přirozené číslo, b celé číslo a $(a, b) = 1$, pak je v aritmetické posloupnosti $an + b$ nekonečně mnoho prvočísel.

Příklad 12. Existují přirozená čísla a a b taková, že kdykoliv p a q jsou různá prvočísla větší než 1000, pak $ap + bq$ je prvočíslo? (Petěrburg 1996)

Příklad 13. Nechť S je množina všech převrácených hodnot přirozených čísel. Potom pro každé $k > 1$ ukažte, že v S existuje k-členná nekonstantní aritmetická posloupnost taková, že k ní neumíme přidat žádný další prvek z S tak, aby posloupnost zůstala aritmetická. (Británie 1997)

Příklad 14. Dokažte, že když s, a a b jsou přirozená čísla a $(a, b) = 1$, pak xistuje nekonečně mnoho n tak, že $an + b$ je součinem s různých prvočísel.

Příklad 15. Nechť m je kladné liché číslo. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho kladných n tak, že $mn + 1 \mid 2^n - 1$. (Mongolsko TST 2008)

Příklad 16. Pro každé přirozené n ukažte, že existuje přirozené k tak, že

$$p_{k-1} < p_k - n < p_k + n < p_{k+1}.$$

(AMM E4772)

Příklad 17. Nalezněte všechny polynomy $P(x)$ s racionálními koeficienty takové, že pokud p je prvočíslo, pak i $P(p)$ je prvočíslo. (AMM E1632)

Příklad 18. Nalezněte všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že pokud p a q jsou různá prvočísla, pak $P(p)$ a $P(q)$ jsou nesoudělná čísla.
(Mathematical Reflection O318)

Příklad 19. Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, m existuje přirozené k takové, že n dělí všechna čísla $\phi(k)$, $\phi(k+1)$, …,$\phi(k+m)$ jsou dělitelná n. (AMM E4524)

Příklad 20. Dokažte, že existuje nekonečná množina S po dvou nesoudělných přirozených čísel taková, že pro libovolné $n \in S$ neexistuje žádná trojice celých čísel x, y, z taková, že $xyz \neq 0$, $(n, xyz) = 1$ a

$$x^n + y^n + z^n = 0.$$

(AMM 1978)

Příklad 21. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že číslo $n^4 + 1$ má prvočíselného dělitele většího než $2n$. (MKS 30-2-8)

Příklad 22. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $n^2 + 1$ má prvočíselného dělitele většího než $2n + \sqrt{2n}$. (IMO 2008)

Zsigmondyho věta

Věta (Zsigmondyho věta). Nechť $a > b \geq 1$ jsou nesoudělná celá čísla. Pokud $n > 1$ pak:

- Existuje prvočíslo p takové, že $p \mid a^n - b^n$ a pro $1 \leq i < n$ platí $p \nmid a^i - b^i$. Výjimkou je případ $(a, b, n) = (2, 1, 6)$ a případ $(a, b, n) = (a, 2^k - a, 2)$ pro nějaké přirozené k.
- Existuje prvočíslo q takové, že $q \mid a^n + b^n$ a pro $1 \leq i < n$ platí $q \nmid a^i + b^i$. Výjimkou je případ $(a, b, n) = (2, 1, 3)$.

Udělejme úmluvu - pokud se v hintu objeví něco, co s příkladem absolutně nesouvisí, znamená to, že příklad se dá vyřešit jen triviální aplikací věty a tudíž by hint zněl „prostě přímočaře použij větu“.

Příklad 23. Ukažte, že $a_n = 3^n - 2^n$ neobsahuje tři členy tvořící geometrickou posloupnost. (Rumunsko TST 1994)

Příklad 24. Nalezněte všechny trojice přirozených čísel (a, b, p) kde p je prvočíslo a $2^a + p^b = 19^a$. (Itálie TST 2003)

Příklad 25. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel (a, n) takové, že kdykoli prvočíslo p dělí $a^n - 1$, existuje přirozené $m < n$ takové, že $p \mid a^m - 1$. (USA TST 2012)

Příklad 26. Najděte všechna nezáporná celá řešení rovnice $3^m - 5^n = a^2$.

Příklad 27. Najděte všechna nezáporná celá řešení rovnice $5^m - 3^n = a^2$. (Balkán 2009)

Příklad 28. Nechť $p < q$ jsou lichá prvočísla. Dokažte, že $2^{pq} - 1$ má alespoň tři různé prvočíselné dělitele. (Polsko 2010)

Příklad 29. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že pro nějaké prvočíslo p je $p^x - y^p = 1$. (MO 1996)

Příklad 30. Nalezněte všechny pětice přirozených čísel (a, n, p, q, r), pro která $a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1)$. (Japonsko 2011)

Příklad 31. Nalezněte všechny trojice přirozených čísel (a, m, n) pro které $a^m + 1 \mid (a + 1)^n$. (ISL 2000)

Příklad 32. Najděte všechny čtveřice přirozených čísel (x, r, p, n) takové, že p je prvočíslo, $n, r > 1$ a $x^r - 1 = p^n$. (MOSP 2001)

Příklad 33. Nalezněte všechna přirozená řešení rovnice $(a+1)(a^2+a+1)\dots(a^n + a^{n-1} + \dots + 1) = a^m + a^{m-1} + \dots + 1$.

Příklad 34. Nechť $b, m, n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ a $m \neq n$. Předpokládejme, že $b^m - 1$ a $b^n - 1$ mají stejné množiny prvočíselných dělitelů. Ukažte, že $b + 1$ je mocninou dvojky. (ISL 1997, Čína TST 2005)

Příklad 35. Nechť A je konečná množina prvočísel a $a > 1$ přirozené číslo. Ukažte, že existuje pouze konečně mnoho přirozených n takových, že všechny prvočíselné dělitele čísla $a^n - 1$ leží v A. (Problems from the Book)

Příklad 36. Najděte všechny šestice (a, b, c, p, q, r) přirozených čísel kde p, q, r jsou prvočísla a $p^{2a} = q^b r^c + 1$. (Srbsko TST 1977)

Příklad 37. Nalezněte všechna přirozená n, pro která mají n a $2^n + 1$ stejnou množinu prvočíselných dělitelů. (iKS 3-3)

Příklad 38. Patrik miluje prvočísla. Některá miluje hodně, jiná více, ale má několik prvočísel, která miluje nejvíce. Všechna tato prvočísla si schoval do konečné neprázdné množiny P. K narozeninám by si od vás přál takové přirozené číslo n, které lze zapsat jako $a^p + b^p$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$ (kde p je prvočíslo) právě tehdy, když $p \in P$. Rozhodněte, zda můžete jeho přání splnit pro každou množinu P. (iKS 5-3)

Mihailescova věta

Věta (Mihailescova věta). Pokud pro přirozená čísla a, b, m, n platí $a^m - b^n = 1$, pak $m = 1$ nebo $n = 1$ nebo $(a, b, m, n) = (3, 2, 2, 3)$.

Příklad 39. Ukažte, že $n^7 + 1$ nikdy není čtverec. (Indie TST)

Příklad 40. Přirozená čísla $x > 2$, $y > 1$ a $z > 0$ splňují rovnici $x^y + 1 = z^2$. Nechť p, resp. q, je počet různých prvočíselných dělitelů x, resp. y. Ukažte, že potom $p \geq q + 2$. (Rusko 2005)

Příklad 41. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že pro nějaké prvočíslo p je $p^x - y^p = 1$. (MO 1996)

Příklad 42. Najděte všechny čtveřice přirozených čísel (x, r, p, n) takové, že p je prvočíslo, $n, r > 1$ a $x^r - 1 = p^n$. (MOSP 2001)

Příklad 43. Kolik nejméně různých prvočíselných dělitelů může mít výraz $19^{4n} + 4$? (Turecko juniorů 2014)

Příklad 44. Najděte všechna prvočísla p taková, že $p(2^{p-1} - 1) = a^k$ pro nějaká přirozená a a $k > 1$. (iKS 2-1)

Hinty

Hint 1. Vynásobte dvěmi a použijte BP.
Hint 2. Ukažte, že pro $i > 3$ je $p_1 p_2 \dots p_i > p_{i+1}^2$.
Hint 3. Uvažte p mezi $\frac{n}{2}$ a n.
Hint 4. $n = 2^{2016}$
Hint 5. $p_{i+2} < p_{i+1} + p_i$
Hint 6. Indukcí
Hint 7. Indukcí
Hint 8. Převeďte na největšího společného jmenovatele.
Hint 9. Vadí nám, když je tam nějaké prvočíslo dvakrát.
Hint 10. Pro $k = 1$ máme Catalanova čísla. Pro $k > 1$ najdeme prvočíslo p pro které $k < p < 2k$ a zvolíme $n = p^i + p - k$.
Hint 11. Když $x \geq y$, zvol prvočíslo mezi $\frac{x}{2}$ a x.
Hint 12. Vezměte $p = rx + b$ a $q = rx - a$.
Hint 13. Nechť $a_1 = \frac{1}{(kn)!}$ a $d = \frac{n}{(kn)!}$.
Hint 14. Indukcí
Hint 15. Zvolte dostatečně vysoké prvočíslo $p = \phi(m)k + 1$. Poté zvolte $n = \frac{2^p - 2}{m}$.
Hint 16. Zvolte $p \equiv (q-1)! - 1 \pmod{q!}$, kde q je prvočíslo větší než $n + 2$.
Hint 17. Nechť $Q(x)$ je $P(x)$ přenásobený tak, že má celočíselné koeficienty. Potom nechť $m_i = Q(p)n_i + p$ pro prvočíslo p takové, že $p \nmid Q(p)$.
Hint 18. Zvolte p velké, $p_1 | P(p)$ a $q = p_1 n + p$.
Hint 19. Uvědomte si, že pokud prvočíslo p dělí a, pak $p - 1$ dělí $\phi(a)$.
Hint 20. Pokud máme $n_1, \dots, n_k$, pak vezmeme $p \equiv -1 \pmod{4 n_1 n_2 \dots n_k}$ a $n_{k+1} = \frac{p(p-1)}{2}$.
Hint 21. Zvolte $p = 8k + 1$, r jako primitivní prvek modulo p a $n = r^k$.
Hint 22. Zvlote $p = 20k + 1$ a vezměte nejmenší n, které splňuje $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
Hint 23. Nechť pro $x < y < z$ je $(3^y - 2^y)^2 = (3^x - 2^x)(3^z - 2^z)$. Podívejte se na prvočísla $3^z - 2^z$.
Hint 24. Američtí vědci zjistili, že 21,3857% statistik jsou přesnější, než si mohou dovolit.
Hint 25. Waterboarding v Guantanamo Bay zní fakt cool, když ani o jednom z toho nevíte, co to je.
Hint 26. Modulo 4 zjistíme, že m je sudé. Použijte rozdíl čtverců.
Hint 27. Modulo 3 zjistíme, že m je sudé. Použijte rozdíl čtverců.
Hint 28. $2^p - 1 \mid 2^{pq} - 1$, $2^q - 1 \mid 2^{pq} - 1$
Hint 29. Kdybych dostal korunu vždycky, když mne dívka považuje za neatraktivního, měl bych tolik peněz, že by mě dívky považovaly za atraktivního.
Hint 30. V 21. století je důležitější historii mazat, než ji tvořit.
Hint 31. Studie zjistila, že ženy, které trpí lehkou nadváhou žijí déle, než muži, kteří se o tom zmíní.
Hint 32. Smysl pro černý humor je jako jídlo. Někteří lidé ho mají, někteří ne.
Hint 33. $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$
Hint 34. Jsem skvělý v multitaskingu. Zvládám najednou guuglit vtipy, prokrastinovat a psát příspěvek do *i*KSka.

Hint 35. Kanadský psycholog za 20$ prodává knihu, která vás naučí, jak otestovat IQ vašeho psa. Pokud si ji koupíte, váš pes je chytřejší než vy.

Hint 36. $p^a + 1$ a $p^a - 1$ jsou (skoro) nesoudělné.

Hint 37. Ukažte, že pokud $p | 2^n + 1$, pak (až na výjimky) platí, že $\mathrm{ord}_p(2) = 2n$.

Hint 38. Pokud Π je součin všech prvočísel z P, zvolte $2^{\Pi+1}$.

Hint 39. Ptal jsem se severokorejských matematiků, jak se jim žije v jejich domovině. Prý si nemohou stěžovat.

Hint 40. Žij každý den, jako by to byl tvůj poslední. Jednou budeš mít pravdu.

Hint 41. Můj dědeček má lví srdce a doživotní zákaz vstupu do zoo.

Hint 42. Co mají společného alkoholik a pedofilní nekrofil? Oba mají rádi studenou dvanáctku.

Hint 43. $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$

Hint 44. Rozlož závorku.

Obsah