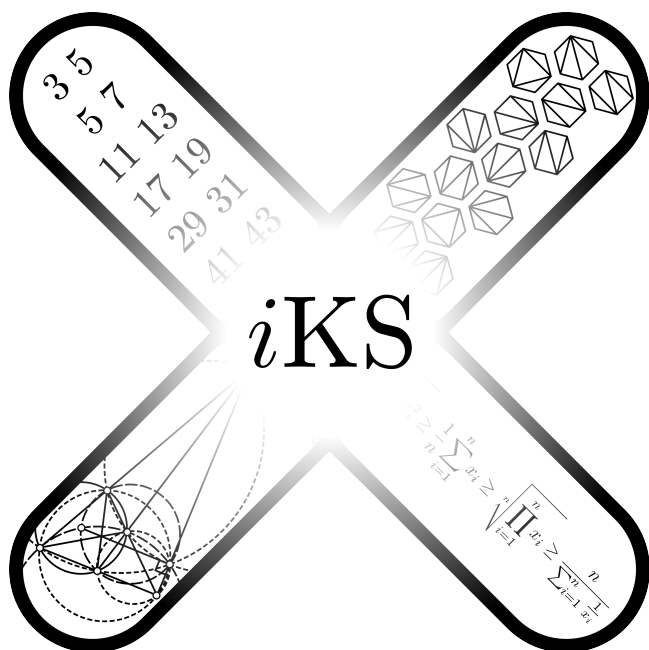




Hostětín 2013

SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ

AUTOŘI: Michael „Majkl“ Bílý, Michal „Miki“ Kopf, Viktor Lukáček, Mirek Olšák, Michal „Kenny“ Rolínek, Filip Sládek, Pavel Šalom, Pepa Tkadlec

EDITOR: Alexander „Olin“ Slávik

KOREKTOŘI: Peter „πtr“ Korcsok, Kuba Krásenský, Martina Vaváčková

Vydání první, náklad 25 výtisků

Únor 2013

Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

ARITMETICKÉ VLASTNOSTI POLYNÓMOV

FILIP SLÁDEK

ABSTRAKT. Venujeme sa polynómom nie z analytického, ale z algebraického hľadiska. Teda sa na ne nepozeralíme ako na funkcie, ale ako na množinu vybavenou operáciami sčítania a násobenia, čo nám umožňuje skúmať vlastnosti ako rozklady na súčin a ireducibilita, násobnosť koreňov, celočíselnosť koreňov a iné či už teoreticko číselné, alebo algebraické otázky.

Kecy kecy, blá blá blá. Velmi nás to zajímá a vás určité taky. Proto si řekneme i nějaká tvrzení.

Definícia. Výrazom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in X[x]$ budeme v tomto texte rozumieť, že polynóm f premennej x má koeficienty z množiny X .

Definícia. Polynóm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ sa nazýva *monický*, ak $a_n = 1$.

Definícia. Polynóm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in X[x]$ nazveme *ireducibilný* nad Y , kde $X \subseteq Y$, ak sa $f(x)$ nedá napísať ako súčin dvoch polynómov z $Y[x]$ takých, že oba nedelia jednotku (napr. $5 \cdot x$ je reducibilný nad $\mathbb{Z}$).

Definícia. Majme polynóm $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. *Deriváciou* $f(x)$ nazveme polynóm $g(x) = \sum_{i=1}^n i \times a_i x^{i-1}$.

Veta. Ak $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ a racionálne číslo $c = \frac{p}{q}$ je koreň $f(x)$ (pričom $(p, q) = 1$), tak $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$. Teda ak je monický, $c \in \mathbb{Z}$.

Veta. Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, racionálne číslo $c = \frac{p}{q}$ je koreň $f(x)$ (pričom $(p, q) = 1$) a nech $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{Q}$ je taký, že $f(x) = g(x)(x - \frac{p}{q})$. Potom $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Lemma (Gaussova lemma). Ak $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$, potom je ireducibilný aj nad $\mathbb{Q}$.

Veta (Eisensteinovo kritérium). Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $p \in \mathbb{P}$ a platí

(1) $p \nmid a_n$,

- (2) $p \mid a_i$ pre $i = 0, 1, \dots, n-1$,
 (3) $p^2 \nmid a_0$.

Potom $f(x)$ je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$.

Veta. Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, kde F je pole (pre naše potreby $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$). Polynóm $f(x)$ má viacnásobný koreň pvk je súdeliteľný so svojou deriváciou.

Veta (Lagrangeova interpolácia). Majme zadaných n bodov s rôznymi x -ovými súradnicami $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Existuje práve jeden polynóm stupňa n , ktorý nimi prechádza, a to

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{1 \leq j \leq n, i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Veta. Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, kde F je pole (pre naše potreby $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$). Polynóm $f(x)$ má najviac n koreňov. Preto napr. kongruencia $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ má najviac n navzájom nekongruentných riešení.

Lemma (Schurova lemma). Ak $P \in \mathbb{Z}[x]$ je nekonštantný, potom množina $A = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N} : P(n) \neq 0 \wedge \Rightarrow p \mid P(n)\}$ je nekonečná.

ZOO

Definícia. Polynóm $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \neq 0$ sa nazýva *reciproký*, ak $a_i = a_{n-i}$.

Veta.

- (1) Reciproký polynóm $P(x)$ stupňa $2n$ sa dá napísať $P(x) = x^n R(z)$, kde $z = x + \frac{1}{x}$ a $R(z)$ je polynóm stupňa n .
- (2) Ak $a_0 \neq 0$, tak $P(x)$ je reciproký pvk $P(x) = x^n P(1/x)$.
- (3) Každý reciproký polynóm nepárneho stupňa je deliteľný $x+1$ a podiel je reciproký polynóm párneho stupňa.
- (4) Ak $0 \neq a$ je koreň, potom aj $\frac{1}{a}$ je koreň.

Definícia.

- (1) Polynóm $P(x, y)$ sa nazýva *antisymetrický*, ak $P(x, y) = -P(y, x)$.
- (2) Polynóm $P(x, y, z)$ sa nazýva *antisymetrický*, ak pri každej zámene premenných sa zmení znamienko.

Veta.

- (1) Antisymetrický polynóm $P(x, y)$ sa dá napísať $P(x, y) = (x - y)R(x, y)$, kde $R(x, y)$ je symetrický.

- (2) *Antisymetrický polynóm* $P(x, y, z)$ sa dá napísať $P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)R(x, y, z)$, kde $R(x, y, z)$ je symetrický.
- (3) Ak je $P(x, y)$ symetrický a $x - y \mid P(x, y)$, potom $(x - y)^2 \mid P(x, y)$.

HURÁ NA PRÍKLADY!

Pytagoriáda.

Úloha 1. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a $3 \mid P(k), P(k+1), P(k+2)$. Potom $3 \mid P(m)$ pre všetky $m \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2. Dokáž, že $1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n!$ nemá násobné korene.

Úloha 3. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je monický stupňa n a $k, m \in \mathbb{N}$. Dokáž, že ak každé $P(k), \dots, P(k+m)$ nie je deliteľné $m+1$, potom $P(x)$ nemá koreň v $\mathbb{Q}$.

Úloha 4. $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \dots - 2nx + 2n + 1$ nemá reálny koreň.

Úloha 5. Majme a, b, c reálne. Ak ich súčet, súčin aj $ab + bc + ca$ sú kladné, potom $a, b, c > 0$.

Úloha 6.

- (1) Aké môžu byť a, b , ak platí $(x-1)^2 \mid ax^4 + bx^3 + 1$?
- (2) Ukáž, že $(x-1)^2 \mid nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

Úloha 7. Dokáž, že $k \mid n \Leftrightarrow x^k - a^k \mid x^n - a^n$, kde $a, k, n \in \mathbb{N}$ a delenie napravo myslíme v zmysle polynómov v $\mathbb{Z}[x]$.

Úloha 8. Nech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, bc je párne, ad nepárne. Potom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ má iracionálny koreň.

Úloha 9. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je monický. Ak v štyroch rôznych celých číslach má hodnotu 5, potom neexistuje celé číslo s hodnotou 8.

Úloha 10. Nájdí všetky $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ také, že $1 + x + \dots + x^m \mid 1 + x^n + \dots + x^{mn}$.
(USAMO 1977/1)

Úloha 11. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dokáž, že ak v troch celých číslach má hodnotu -1 , potom nemá celočíselný koreň.

Úloha 12. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ak $P(0)$ aj $P(1)$ sú nepárne, potom nemá celočíselný koreň.

Úloha 13. Urči a, b, c tak, aby každý z polynómov $ax^2 + bx + c, cx^2 + ax + b, bx^2 + cx + a$ mal dva reálne korene.

Úloha 14. Rieš $y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$ v $\mathbb{R}$.

Úloha 15. Nech $P \in \mathbb{Z}[x]$ je monický s nenulovým koeficientami a celočíselnými navzájom rôznymi koreňmi. Dokáž, že ak sú korene po dvoch nesúdeliteľné, tak $(a_1, a_0) = 1$.
(Rusko 2004)

Olympiáda.

Úloha 16. Dokáž úvodné vety.

Úloha 17. Existuje množina bodov v priestore, ktorá pretína každú rovinu v konečnom nenulovom počte bodov?

Úloha 18. Pre všetky polynómy $P(x)$ stupňa aspoň 2 existuje polynóm $Q(x)$ taký, že $P(Q(x))$ sa dá napísať ako súčin nekonštantných polynómov. Všetko robíme nad celými číslami.

Úloha 19. Ak a, b sú dva korene $x^4 + x^3 - 1 = 0$, potom ab je koreň $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$. (USAMO 1977/3)

Úloha 20. Ak $a_i \in \mathbb{Z}$ sú rôzne, potom $(x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$.

Úloha 21. Dokáž, že $P(x) = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^{2n}/(2n)!$ nemá koreň v $\mathbb{R}$.

Úloha 22. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a $n \in \mathbb{N}$ je nepárne. Ak pre $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ platí $x_{i+1} = P(x_i)$ cyklicky, potom sú všetky x_i rovnaké.

Úloha 23. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sú rôzne. Potom nemôže byť naraz $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$. (USAMO 1974/1)

Úloha 24. Nech $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1 = P(x) \in \mathbb{Z}_0^+[x]$ má n reálnych koreňov. Ukáž, že $P(2) \geq 3^n$.

Úloha 25. Pre všetky nenulové $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ existuje nenulový $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ taký, že $P(x)Q(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_px^p$ má iba prvočíselné exponenty.

Úloha 26. Nech $0 \neq a, b, c \in \mathbb{Z}$ sú také, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$. Potom $|a| = |b| = |c|$.

Úloha 27. Nech $P \in \mathbb{Z}[x]$ a pre $n \in \mathbb{N}$ je $P(n) > n$. Majme postupnosť $x_1 = 1$ a $x_{i+1} = P(x_i)$. Pre každé m existuje člen postupnosti deliteľný m . Dokáž $P(x) = x + 1$. (Iran TST 2004)

Úloha 28. $x^{p-1} + \cdots + x + 1$ je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$.

Úloha 29. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Definujme postupnosť nasledovne: $x_0 = 0$ a $x_{i+1} = P(x_i)$. Ak $\exists n \in \mathbb{N}$ také, že $x_n = 0$, potom $P(0) = 0$ alebo $P(P(0)) = 0$. (PUTNAM 2000)

Úloha 30. $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$, kde $(P, Q) = 1$. Dokáž, že postupnosť $a_n = (P(n), Q(n))$ je periodická.

IMO.

Úloha 31. Nech $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ a $S = a + b + c + d + e + f$.

$$S \mid abc + def \wedge S \mid ab + bc + ca - de - ef - fd \Rightarrow S \notin \mathbb{P} \cup \{1\}.$$

(Shortlist 2005 N3)

Úloha 32. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ má stupeň d . Nech $p \in \mathbb{P}$, $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dáva $P(n)$ zvyšok 0 alebo 1 po delení p . Dokáž, že $d \geq p - 1$.

(IMO 1997 Shortlist)

Úloha 33. Ak $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ sú monické, nekonštantné, ireducibilné také, že pre všetky dostatočne veľké n majú $P(n)$, $Q(n)$ rovnakú množinu prvočíselných deliteľov, tak $P = Q$.

Úloha 34. Nech $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ je stupňa n a všetky jeho korene ležia na jednotkovej kružnici. Ukáž, že aj korene polynómu $2xP'(x) - nP(x)$ má korene na jednotkovej kružnici.

Úloha 35. Nech $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je stupňa aspoň 2 a $k \in \mathbb{N}$. Dokáž, že polynóm $\underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{k\text{-krát}} - x$ má najviac n celočíselných koreňov. (IMO 2006/5)

Úloha 36. Pre ktoré k platí: ak $P \in \mathbb{Z}[x]$ spĺňa $0 \leq P(0), P(1), \dots, P(k+1) \leq k$, tak $P(0) = \dots = P(k+1)$. (IMO 1997 Shortlist)

Úloha 37. Ak $P \in \mathbb{Z}[x]$ je nekonštantný a $n, k \in \mathbb{N}$, potom $\exists a \in \mathbb{N}$, že každé $P(a), P(a+1), \dots, P(a+n-1)$ má aspoň k rôznych prvočíselných deliteľov. (Bulharsko)

Úloha 38. Ak F je podiel dvoch reálnych polynómov a $F(n) \in \mathbb{N}$ pre nekonečne veľa celých čísel n , potom F je polynóm.

Úloha 39. Dokáž, že ak $1 < n \in \mathbb{Z}$, potom $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$. (IMO 1993/1)

Úloha 40. Nájdí všetky polynómy $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) také, že $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ je permutácia $(0, 1, \dots, n)$ a všetky korene $P(x)$ sú v $\mathbb{Q}$.

Úloha 41. Nájdí všetky polynómy $P(x, y)$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

- (1) $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $t, x, y \in \mathbb{R}$,
- (2) $P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0$ pre všetky $a, b, c \in \mathbb{R}$,
- (3) $P(1, 0) = 1$.

(IMO 1975/6)

Úloha 42. Nech $P_1(x) = x^2 - 2$ a $P_i(x) = P_1(P_{i-1}(x))$. Dokáž, že pre $n \in \mathbb{N}$ všetky korene polynómu $P_n(x) - x$ sú reálne a rôzne. (IMO 1976/2)

Úloha 43. Majme nekonštantný $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dokáž, že neexistuje funkcia T z celých do celých čísel taká, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sa počet celočíselných riešení rovnice $T^n(x) = x$ rovná $P(n)$ – kde myslíme n -tú iteráciu T . (IMO 2009 Shortlist N5)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Hint 2. Derivácia.

Hint 3. Racionálne korene sú celočíselné.

Hint 4. Vynásob rovnicu x .

Hint 5. Vietove vzťahy.

Hint 6. Derivácia.

Hint 7. Poznáme korene oboch polynómov.

Hint 8. Substitúciou $y = ax$ dostaneme monický polynóm v premennej y , ktorý by musel mať celočíselné korene, spor.

Hint 9. $Q(x) = P(x) - 5$.

Hint 10. Vieme obe sčítať.

Hint 11. $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)Q(x) - 1$.

Hint 12. Ak $a \in \mathbb{Z}$ je koreň, potom $-aQ(a) \not\equiv (1 - a)Q(a) \pmod{2}$.

Hint 13. Diskriminanty.

Hint 14. Kvadratická rovnica.

Hint 15. *Vieta*.

Hint 17. Vezmi množinu bodov tvaru $(P(t), Q(t), R(t))$.

Hint 18. $Q(x) - x \mid P(Q(x)) - P(x)$. Čo keď $Q(x) = x + P(x)$?

Hint 19. Vietove vzťahy.

Hint 21. $P(x)$ má minimum a $P(x) = P'(x) + x^{2n}/(2n)!$, preto minimum je kladné.

Hint 22. $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Hint 23. $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Hint 24. Faktorizuj (korene sú kladné) a odhadni pomocou AG.

Hint 25. Lineárne nezávislé rovnice.

Hint 26. $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Hint 27. $x_{k+1} - x_k \mid x_{k+2} - x_{k+1}$.

Hint 28. $P(x)$ je ireducibilný pvk $P(x+1)$ je ireducibilný. Potom *Eisenstein*.

Hint 29. $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Hint 30. *Bezout*.

Hint 31. $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Hint 32. *Lagrangeova interpolácia* a $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} P(i) = 0$.

Hint 33. *Gauss* $\implies$ ireducibilné nad $\mathbb{Q}$.

Ak sa nerovnajú, sú nesúdeliteľné v $\mathbb{Q}[x]$.

Z *Bezouta* dostaneme spor so *Schurom*.

Hint 34. Napiš skúmaný polynóm v tvare súčinu, uprav ho ako sumu a predeľ $P(x)$.

Hint 35. Pre korene platí, že $|x - y| = |P(x) - P(y)|$. Stačí použiť $x - y \mid P(x) - P(y) \Rightarrow |x - y| \leq |P(x) - P(y)|$.

Hint 36. Skúmaj polynóm $Q(x) = P(x) - P(0)$.

Hint 37. *Schur* zabezpečí, že sa to dá pre ľubovoľne veľké k , a *Čínko zvyšok*, že k nemu nájdeme konkrétne a .

Hint 39. Pre spor rozober 2 prípady podľa toho, či oba faktory majú stupeň aspoň dva alebo nie.

Hint 41. Ponaajprv $P(x, y) = (x - 2y)Q(x, y)$, kde $Q(x, y) = Q(2y, x - y) = Q(2x - 2y, 3y - x) = \dots$, teda $Q(x, y) = c(x + y)^n - 1$.

Hint 42. $x(t) = 2 \cos t$.

Hint 43. Pozri sa na počet takých riešení $T^k(x) = x$, že k je pre ne najmenšie.

LITERATÚRA

- [1] Arthur Engel: *Problem Solving Strategies*
- [2] Andreescu, Dopinescu: *Problems from the BOOK*
- [3] Yufei Zhao: *Integer Polynomials*
- [4] Alexander Remorov: *Polynomials*

POSLOUPNOSTI V TEORII ČÍSEL

MICHAEL „MAJKL“ BÍLÝ

ABSTRAKT. Příspěvek slouží k procvičení známých i méně známých postupů při řešení problémů z teorie čísel, ve kterých vystupují posloupnosti. Zároveň vykládá některá tvrzení a věty, která se při řešení používají.

Obecně se rozhodně nedá říct, která metoda se na úlohy tohoto typu používá. V této oblasti je však nemálo zbraní. Takovou zbraní může být například následující věta.

Věta. *Mějme rekurentní rovnici*

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n+k} = 0.$$

Pak polynom $\Lambda(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ nazveme charakteristickým polynemem dané rekurentní rovnice. Necht' λ_i jsou kořeny násobnosti α_i pro $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ charakteristického polynomu, pak posloupnosti

$$\{\lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}, \{n\lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{n(n-1)\dots(n-\alpha_i+1)\lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}$$

splňují rekurentní rovnici $\sum_{k=0}^m a_k y_{n+k} = 0$.

Když si je navíc označíme jako $\{b_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ pro $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, pak každé řešení této rekurentní rovnice dostaneme jako $y_n = \sum_{k=1}^m C_k b_n^k$ pro nějaké $C_k \in \mathbb{R}$. Navíc – pokud některou z posloupností $\{b_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ vynecháme, nějaké řešení už nelze takto vyjádřit.

Pokud máme y_n^p nějaké řešení rekurentní rovnice $\sum_{k=0}^m a_k y_{n+k} = P_n$, pak všechna řešení této rovnice dostaneme jako $y_n = y_n^p + \sum_{k=1}^m C_k b_n^k$.

Musíme ale upozornit, že vyjádření rekurentní posloupnosti explicitně pomocí předchozí věty nemusí vždy při řešení pomoci, často se tím spíše dostaneme do slepé uličky. Někdy je to také zbytečně složitá metoda na příliš jednoduchou úlohu.

Definice. Řekneme, že operace $\oplus$ je komutativní, pokud $a \oplus b = b \oplus a$, asociativní, pokud $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

Množinu G s operací $\oplus$ nazveme komutativní grupou, pokud pro všechna $a, b \in G$ platí $a \oplus b \in G$, $\oplus$ je komutativní, asociativní, existuje jednotka $e \in G$ tak, že $a \oplus e = a$ a pro každé $a \in G$ existuje $c \in G$, že $a \oplus c = e$.

Množinu T s operacemi $\oplus, \odot$ nazveme komutativním tělesem (dále jen tělesem), pokud T s operací $\oplus$ je kom. grupa s jednotkou 0 a $T \setminus \{0\}$ je kom. grupa s jednotkou 1 , a navíc platí distributivita těchto operací: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Ač se to nezdá, teorie kolem těles, grup a okruhů se dá dost často v teorii čísel využít. Více na přednášce. Uvedeme si ale jednu větu, kterou v úlohách použijeme.

Věta. *Existuje těleso o čtyřech prvcích.*

Následující věta je spíše lehká a možná i zřejmá, přesto je dobré ji znát. Navíc ji v příkladech použijeme.

Věta. *Mějme m a n nesoudělná přirozená čísla, pak všechna čísla větší než $(m-1)(n-1)$ dostaneme jako $am + bn$ pro nějaká přirozená čísla a a b .*

Poznámka. Je $(m-1)(n-1)$ poslední číslo, které se takto vyjádřit nedá?

Věta. *Nechť y je kořenem polynomu $ax^2 + bx + c$, pak druhým kořenem je $z = \frac{c}{ay} = -y - \frac{b}{a}$.*

Využití této věty se říká Vieta jumping a je to relativně nová metoda, často v kombinaci s nekonečným sestupem tvoří mocnou zbraň.

Definice. Číslo n nazveme bezčtvercové, pokud $p^2 \nmid n$ pro všechna $p \in \mathbb{P}$.

Definice. Möbiova funkce je zobrazení $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ definované

$$\mu_n = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{pokud } n \text{ je součin } k \text{ různých prvočísel;} \\ 0, & \text{pokud } n \text{ není bezčtvercové.} \end{cases}$$

Věta (Möbiova inverzní formule). *Nechť $G = (G, +)$ je komutativní grupa a $H, h: \mathbb{N} \rightarrow G$ zobrazení. Pak*

$$H(n) = \sum_{d|n} h(d) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

právě tehdy, když

$$h(n) = \sum_{d|n} \mu(d) H\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) H(d) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. Součin ab v předchozí větě chápeme jako $b + b + \dots + b$, a -krát pro $a \in \mathbb{N}$, jako 0 pro $a = 0$ a $(-b) + (-b) + \dots + (-b)$, $(-a)$ -krát pro $-a \in \mathbb{N}$.

Věta (O řešení Pellovy rovnice). *Rovnice*

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

má pro $D \neq d^2$ nekonečně mnoho řešení. Pokud je (p, q) řešení takové, že $p + q\sqrt{D}$ je nejmenší, pak všechna ostatní řešení jsou tvaru

$$\left(\frac{(p + q\sqrt{D})^n + (p - q\sqrt{D})^n}{2}, \frac{(p + q\sqrt{D})^n - (p - q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \right).$$

HURÁ NA PŘÍKLADY!

Úloha 1. Označme $s(n)$ ciferný součet čísla n . Mějme n takové, že $3 \nmid n$. Dokažte, že existuje přirozené číslo m takové, že $\forall k > m$: k se vyskytuje v posloupnosti $\{s(kn)\}_{k=1}^{\infty}$.

Úloha 2. Pokud existuje posloupnost a_n přirozených čísel splňujících

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n},$$

pak $3 \mid k - 2$.

Úloha 3. Necht

$$a_0 = 0, a_1 = m, a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}.$$

Dokažte, že pokud dvojice (a, b) , $a \leq b$ splňuje rovnici

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2,$$

pak je tvaru (a_n, a_{n+1}) .

Úloha 4. Necht

$$x_0 = 1, x_1 = 4, x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n,$$

$$y_0 = 1, y_1 = 2, y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n.$$

Dokažte, že pokud dvojice (a, b) splňuje $a^2 - 5b^2 + 4 = 0$, pak je tvaru (x_k, y_k) .

Úloha 5. Necht $a, b \in \mathbb{N}$ a

$$u_0 = 1, u_{n+1} = au_n + b,$$

dokaž, že posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

Úloha 6. Nechť

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = (4k - 5)y_{n+1} - y_n + 4 - 2k.$$

Najděte $k \in \mathbb{N}$ tak, aby každý člen této posloupnosti byl čtverec přirozeného čísla.

Úloha 7. Nechť posloupnost je definovaná

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n.$$

Dokažte, že pokud je a_n prvočíslo, pak n je mocnina 3.

Úloha 8. Nechť posloupnost je definována

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 24, \quad a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1} a_{n-2}^2}{a_{n-2} a_{n-3}}.$$

Dokažte, že a_n je přirozené číslo a $n \mid a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 9. Definujme posloupnost

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k.$$

Dokažte, že

$$B_{2n} + \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p-1 \mid 2n}} \frac{1}{p}$$

je celé.

Poznámka. Číslům B_n z předchozí úlohy se říká Bernoulliho.

Úloha 10. Definujme posloupnost

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} a_n \right\rfloor.$$

Dokažte, že obsahuje nekonečně mnoho sudých i lichých čísel.

Úloha 11. Nechť $a_1 = 11^{11}$, $a_2 = 12^{12}$, $a_3 = 13^{13}$, a

$$a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|.$$

Najděte $a_{14^{14}}$.

Úloha 12. Definujme posloupnost

$$x_0 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|.$$

Dokažte, že posloupnost je periodická právě tehdy, když x_0 je racionální.

Úloha 13. Necht x_1 a x_2 jsou nesoudělná přirozená čísla. Pro $n \geq 2$ definujeme $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + 1$.

- (1) Dokažte, že pro každé $i > 1$ existuje $j > i$ takové, že x_i^i dělí x_j^j .
- (2) Je pravda, že x_1 musí dělit x_j^j pro nějaké $j > 1$?

Úloha 14. Necht $n > 6$ je přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou přirozená čísla menší než n a s n nesoudělná. Pokud

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

dokažte, že n je prvočíslo nebo mocnina dvojky.

Úloha 15. Definujeme $a_i = i$ pro $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, kde p je nějaké prvočíslo. Dále

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-p}.$$

Najděte zbytek po dělení p čísla a_{p^3} .

Úloha 16. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je definována

$$2^n = \sum_{d|n} a_d.$$

Dokažte, že a_n je dělitelné n .

Úloha 17. Posloupnost začínající 1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5 pokračuje tak, že následující člen je poslední cifra součtu předchozích 6 členů. Dokažte, že se v posloupnosti nemůže vyskytnout 0, 1, 0, 1, 0, 1.

Úloha 18. Posloupnost začínající 1, 9, 8, 2 pokračuje tak, že následující člen je poslední cifra součtu předchozích 4 členů. Může se 3, 0, 4, 4 objevit v takovéto posloupnosti?

Úloha 19. Každý člen nekonečné posloupnosti dostaneme tak, že k předchozímu přičteme jednu jeho nenulovou cifru. Dokažte, že posloupnost obsahuje sudé číslo.

Úloha 20. Dokažte, že existují nekonečné rostoucí posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n(a_n + 1)$ dělí $b_n^2 + 1$.

Úloha 21. Necht posloupnost a_n sestávající ze samých -1 a 1 splňuje $a_{nm} = a_n a_m$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ a nikdy neplatí $a_n = a_{n+1} = a_{n+2}$. Najděte všechny takové posloupnosti.

Úloha 22. Najděte všechny posloupnosti a_n takové, že $a_{nm} = a_n a_m$ a $a_n = a_{n+2011}$.

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Najděte dobrá čísla taková, že jejich ciferné součty budou nesoudělné, pak použijte větu o tom, jaká čísla můžeme dostat jako lin. komb. dvou nesoudělných čísel.

Hint 2. Najděte polynom, který splňuje tuto rekurenci až na nějaký zbytek. Na výsledný vztah použijte správné modulo.

Hint 3. Vietovy vztahy.

Hint 4. Vietovy vztahy.

Hint 5. Vyjádři posloupnost explicitně, pak se koukni na prvočinitele čísla $a + b$.

Hint 6. Sporem $k \leq 3$, pro $k = 3$ se posloupnost posune a využije se řešení pomocí kořenů polynomu z první věty a ono to vyjde.

Hint 7. Vyjádřete posloupnost pomocí první věty a použijte známé vlastnosti Fibonacciho čísel.

Hint 8. Vyjádřete a_n a použijte Eulerovu větu.

Hint 9. Využijte se vlastností Bernoulliho čísel.

Hint 10. Sporem.

Hint 11. Mrkněte na difference a dokažte, že se posloupnost zacyklí.

Hint 12. Dvojková soustava.

Hint 13. Podíváme se na rekurenci modulo nějaké prvočíslo, které dělí a_i . (2) Ne.

Hint 14. Uvažujte prvočísla dělící n , dokažte, že $p < 4$.

Hint 15. Rozviňte rekurenci o $p^2 - 1$ členů a dokažte, že až na poslední jsou všechny dělitelné p .

Hint 16. Möbiova inverzní formule.

Hint 17. Najděte invariant.

Hint 18. Ano.

Hint 19. Podívejme se na tuto posloupnost bez poslední cifry, ta bude jistě obsahovat číslo ze samých lichých čísel.

Hint 20. Pellova rovnice.

Hint 21. Vypočteme pár hodnot, jednu další si můžu zvolit, ostatní už ne = posloupnosti jsou dvě.

Hint 22. Primitivní prvek.

DVOUPOMĚR A POLÁRY

PEPA TKADLEC

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje základní vlastnosti harmonických čtveřic, harmonických čtyřúhelníků a polár. Obsahuje rovněž přes dvacet úloh týkajících se dané tematiky.

Čím je pro začátečníka v geometrii angle-chasing, tím jsou pro ambiciózního olympionika vlastnosti harmonických čtveřic bodů.

TEORIE

Definice. *Dvoupoměrem čtyř bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce rozumíme hodnotu*

$$(AB, CD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

kde úsečky nahlížíme orientovaně.

Tvrzení. *Přímky a, b, c, d procházející bodem P protnou přímku ℓ v bodech A, B, C, D a přímku ℓ' v bodech A', B', C', D' . Pak $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.*

Definice. Řekneme, že čtveřice bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce je *harmonická*, jestliže $(AB, CD) = -1$. Čtveřice A, B, C, D je tedy harmonická, jestliže body C, D dělí úsečku AB ve stejném poměru (jeden zevnitř, jeden zvenčí).

Tvrzení. *V následujících běžných konfiguracích se vyskytují harmonické čtveřice:*

- (1) *Ať M je střed AB . Pak $(AB, M\infty) = -1$.*
- (2) *Ať se ceviany AD, BE, CF protínají v P a označme $D' = EF \cap BC$. Pak $(BC, DD') = -1$.*
- (3) *Na průměru AB kružnice k se středem O je dán bod X . Je-li X' jeho obraz v inverzi podle k (tj. platí-li $OX \cdot OX' = OA^2 = OB^2$), pak $(AB, XX') = -1$.*

(4) Ať A, B, C, D leží na přímce a P mimo ni. Pak z libovolných dvou bodů plyne třetí:

- $(AB, CD) = -1$,
- $\angle APC = 90^\circ$,
- $\angle BPC = \angle CPD$.

Možná poněkud překvapivě lze promítat i na kružnice.

Tvrzení. Je dán bod P ležící na kružnici k a mimo přímku ℓ . Přímky a, b, c, d protnou ℓ v A', B', C', D' a k v A, B, C, D . Pak

$$(A'B', C'D') = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Definice. Řekneme, že tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ je *harmonický*, pokud pro délky jeho stran platí $ac = bd$.

Tvrzení. Buď D bod na oblouku BC (neobsahujícím A) kružnice k opsané trojúhelníku ABC . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $ABDC$ je harmonický
- (2) AD je A -symediána v $\triangle ABC$ (tedy čára symetrická s A -těžnicí podle osy úhlu u A).
- (3) AD a tečny ke k skrz B a C procházejí jedním bodem.

Tvrzení. Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v T, U . Libovolná přímka ℓ skrz A protne přímku TU v B a kružnici k v X, Y . Pak $(AB, XY) = -1$.

Definice. Buď k kružnice se středem O a $X \neq O$. Řekneme, že přímka ℓ je *polára* bodu X vzhledem ke k (bod X je *pól* přímky ℓ vzhledem ke k), jestliže přímka ℓ prochází obrazem X' bodu X v inverzi podle k a je kolmá na OX .

Tvrzení. Ať P, Q jsou body a p, q jejich poláry (vzhledem k nějaké kružnici k). Pak platí, že pokud P leží na q , pak Q leží na p .

Tvrzení. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice k . Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Pak trojúhelník PQR je selfpolar, tedy PQ je polára bodu R , PR je polára bodu Q a QR je polára bodu P .

NA ROZJEZD

Úloha 1. Mějme trojúhelník ABC , bod I je jeho vepsiště, bod I_a jeho A -přípíště, D je průsečík osy úhlu u A a strany BC . Dokažte, že $(AD, II_a) = -1$.

Úloha 2. Cevíany AD, BE, CF se protínají v P . Označme $Q = BC \cap EF$, $R = AD \cap EF$, $S = CF \cap BR$ a $T = DF \cap BR$. Ukažte, že

$$(QR, EF) = (AP, DR) = (CS, PF) = (BS, RT) = -1.$$

Úloha 3. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokažte, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC , leží na pevné kružnici (tzv. *Apoloniiové kružnici*).

Úloha 4. Úhlopříčky tětiového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P . Dokažte, že pokud je BP symediána v ABC , pak AP je symediána v ABD .

(Rumunsko TST 2006)

Úloha 5 (Blanchet Theorem). Na A -výšce AD trojúhelníku ABC je dán bod P . Označme $X = BP \cap AC$, $Y = CP \cap AB$. Dokažte $\angle XDA = \angle YDA$.

Úloha 6. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán pevný bod P . Body X, Y se pohybují po AB, AC tak, že $\angle XPA = \angle YPA$. Ukažte, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 7. Je dána kružnice k a přímka p , která ji neprotíná. Po přímce p se pohybuje bod P . Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U . Dokažte, že přímka TU prochází pevným bodem.

Úloha 8. Úhlopříčky AC, BD tětiového čtyřúhelníku $ABCD$ vepsaného do kružnice k se středem O se protínají v $P \neq O$. Polopřímka OP protne k v X . Ukažte, že obraz přímky CA podle CX , obraz přímky DB podle DX a přímka OX procházejí jedním bodem.

NA ZAMYŠLENÍ

Úloha 9. Je dán trojúhelník ABC , body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme postupně D, E, F . Bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku XBC se dotýká jeho stran v bodech D, Y a Z . Dokažte, že E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 1995)

Úloha 10. Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku ABC ($AB = AC$) se dotýká AC v E . Přímka různá od BE protíná kružnici vepsanou v bodech F, G . Přímky EF, EG protnou BC v K, L . Dokažte $BK = CL$.

(MEMO 2008)

Úloha 11. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu u A a I_b, I_c vepsiště trojúhelníků ABD, ACD .

(1) (Sharygin 2013) Je-li $Q = BC \cap I_b I_c$, dokažte $\angle DAQ = 90^\circ$.

(2) Označíme-li průsečíky $I_b I_c$ s AB, AC postupně M, N , dokažte, že MC a NB se protnou na AD .

Úloha 12. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patou A -výšky D a kolmištěm H . Kružnice skrz B a C protne kružnici nad průměrem AH v X a Y . Označíme-li P projekci D na XY , dokažte $\angle BPD = \angle CPD$. (Japonsko 2013)

Úloha 13. Trojúhelník ABC je vepsán do kružnice k . Osa úhlu u A a A -těžnice protnou kružnici k podruhé v S a T . Označme $X = ST \cap BC$. Dokažte $AB \cdot BX = AC \cdot CX$.

Úloha 14. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I . Body dotyku kružnice vepsané s odpovídajícími stranami označme A_1, B_1, C_1 . Dále označme $D = BC \cap B_1C_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokažte $\angle AFB = \angle AFC$.

Úloha 15. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H . Kružnice s průměrem AB protne CH v X a Y , kružnice s průměrem AC protne BH v Z a W . Dokažte, že (nezávisle na označení) se XZ a YW protínají na BC .
(Brazílie 2013)

Úloha 16. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se středem I se dotýká jeho stran AB, AC v F, E . Označme N průsečík EF a A -těžnice AM . Dokažte $NI \perp BC$.

Úloha 17. V tětiovém pětiúhelníku $ABCDE$ platí $AC \parallel DE$ a střed M tětivy BD splňuje $\angle AMB = \angle BMC$. Dokažte, že BE půlí tětivu AC .

Úloha 18. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v D, E, F . Úsečka AD protne vepsanou podruhé v J a přímky BJ, CJ protnou vepsanou podruhé v K, L . Dokažte, že KC, LB a AD procházejí jedním bodem.

Úloha 19. V trojúhelníku ABC označme M, N projekce B, C na osu úhlu u A . Kružnice nad průměrem MN protne BC v X a Y . Dokažte $\angle BAX = \angle CAY$.
(Sharygin 2013)

Úloha 20. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AB a CD se protnou v bodě E , přímky BC, AD v bodě F . Průsečík úhlopříček označme P a projekci P na EF označme O . Dokažte, že $\angle BOC = \angle AOD$.
(China TST 2002)

Úloha 21. Na stranách AB, AC ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou dány body E, F tak, že označíme-li jejich projekce na BC postupně G, H , pak se EH a FG protínají na A -výšce AD . Označíme-li P projekci F na DE , dokažte $\angle APF = \angle CPF$.
(Korea 2012)

Úloha 22. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek BA, CD a Q polopřímek BC, AD . Je-li H projekce D na PQ , dokažte, že kružnice vepsané ADP a CDQ jsou z H vidět pod stejným úhlem.
(Rusko 2008)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Využijte tvrzení „dvě ze tří“.

Hint 2. Vždy najdete správný bod, z něž promítat.

Hint 3. Dokreslete čtvrtého do party k B , D , C a využijte tvrzení „dvě ze tří“.

Hint 4. Oboje je přece ekvivalentní $ac = bd$.

Hint 5. Zkombinujte konfiguraci „Ceva-Mene“ a tvrzení „dvě ze tří“.

Hint 6. Podívejte se na XY z P a z A .

Hint 7. Kterým zajímavým bodem prochází polára bodu na přímce p ?

Hint 8. Protáhněte polopřímku i na druhou stranu a použijte „dvě ze tří“.

Hint 9. Čtvrtý do party k B , D , C . Mocnost.

Hint 10. Označte zbylé body dotyku, najdete harmonický čtyřúhelník a promítněte ho.

Hint 11. (1) Kde je čtvrtý do party k I_bI_c a $X = AD \cap I_bI_c$? (2) Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.

Hint 12. Chordály tří kružnic procházejí jedním bodem.

Hint 13. Dokreslete rovnoběžku s BC bodem A .

Hint 14. Dokažte a využijte, že AA_1 je polára D .

Hint 15. Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.

Hint 16. Dokazujte, že N je pól rovnoběžky s BC bodem A .

Hint 17. Začněte tím, že AC je symediána v ABD .

Hint 18. Ukažte, že $JKDL$ je harmonický (AD je polára průsečíku $BC \cap EF$).

Hint 19. Úloha o rovnoramenném lichoběžníku. Průsečík úhlopříček a průsečík ramen jsou harmonické se středy základu.

Hint 20. Dokažte, že OP je společná osa jistých dvou úhlů.

Hint 21. $X = EF \cap BC$. S čím vším je XD harmonické?

Hint 22. Vnější střed stejnolehlosti mezi dvěma malými vepsanými leží na PQ .

BARYCENTRICKÉ SOUŘADNICE

MICHAL „KENNY“ ROLÍNEK

ABSTRAKT. Příspěvek popisuje základní principy analytické geometrie v barycentrických souřadnicích.

O CO JDE?

Definice. Ať P je bod v rovině trojúhelníka ABC . Pak barycentrickými souřadnicemi X nazveme trojici reálných čísel (x, y, z) takovou, že

$$P = xA + yB + zC, \quad x + y + z = 1.$$

Poznámka. Vzhledem k podmínce $x + y + z = 1$ je tato trojice určena poměry $x : y : z$. Pro jednoduchost budeme občas psát $X = (x : y : z)$ a mínit tím $X = (x/s, y/s, z/s)$, kde $s = x + y + z$.

Tvrzení. Každý bod v rovině $\triangle ABC$ má jednoznačné souřadnice.

Poznámka. Jelikož jsou barycentrické souřadnice stále vektory, chovají se lineárně. Střed úsečky nalezneme průměrováním souřadnic, podobně třetinu, čtvrtinu, středový obraz a tak dále.

Tvrzení. Je-li $P = (x, y, z)$ v rovině trojúhelníka ABC o obsahu 1, pak

$$[BCP] = |x|, \quad [CAP] = |y|, \quad [ABP] = |z|.$$

Paty cevian z P mají navíc souřadnice

$$\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+z}, 0, \frac{z}{x+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}, 0\right).$$

TROCHA PŘÍPRAVY

Tvrzení (Vlastnosti skalárního součinu). Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ vektory, pak platí:

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- (c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$.
- (d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.
- (e) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, právě když $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Lemma. *Je-li ABC vepsán do kružnice o poloměru R umístěné do počátku souřadnic, pak platí*

$$(a) \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = R^2.$$

$$(b) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}.$$

TO PODSTATNÉ

Tvrzení. *Rovnice přímky má tvar*

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde $u, v, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Tvrzení (O kolmosti). *Ať $M - N = (x_1, y_1, z_1)$ a $P - Q = (x_2, y_2, z_2)$, pak $MN \perp PQ$ právě tehdy, když*

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0.$$

Tvrzení (Výpočet vzdálenosti). *Je-li $P - Q = (x, y, z)$, pak*

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Tvrzení. *Rovnice kružnice má tvar*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0,$$

kde $u, v, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

PŘÍKLADY K SEZNÁMENÍ

Úloha 1. Je dán trojúhelník ABC . Určete souřadnice následujících bodů:

- těžiště, vepsíště, přípsiště.
- středy stran, body dotyku s kružnicí vepsanou, body dotyku s přípsanými.
- průsečky rovnoběžek se stranami vedenými vepsíštěm s obvodem trojúhelníka.
- kolmiště, opsiště.
- švrk, antišvrk.
- kamarád bodu $X = (x, y, z)$.

Úloha 2. Je dán trojúhelník ABC . Určete rovnice následujících přímek:

- strany $\triangle ABC$, střední příčky.
- osy úhlů (vnějších i vnitřních), těžnice, symediány, tečny k opsané ve vrcholech.
- osy stran, výšky.
- strany dotykového trojúhelníka.
- Eulerova přímka.

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete rovnice následujících kružnic:

- (a) opsaná, BGC , BIC .
- (b) AM_bM_c , AEF (dotyky s vepsanou).
- (c) kružnice devíti bodů.
- (d) kružnice vepsaná.

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete následující vzdálenosti:

- (a) AG , BG , CG .
- (b) AI , BI , CI .
- (c) IG .
- (d) I_bI_c (připsiště).

SKUTEČNÉ ÚLOHY

Úloha 5 (Stewart Theorem). In triangle ABC let D lie on the side BC . Denote the distances BD , DC , and AD by m , n , and d , respectively. Then

$$a(d^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Úloha 6. Point P lies inside $\triangle ABC$ with D , E , and F traces of its cevians on BC , CA , AB , respectively. Show that

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

if and only if P lies on one of the medians.

(USA TST 2003)

Úloha 7. In triangle ABC the angle bisectors of $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$ meet the opposite sides at points D , E , and F , respectively. Prove that $ADEF$ is cyclic if and only if

$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+a} + \frac{a}{c+b}.$$

(Mongolia TST 2000)

Úloha 8. Let ABC be an acute, scalene triangle, and let M , N , and P be the midpoints of $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{AB}$, respectively. Let the perpendicular bisectors of $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ intersect ray AM in points D and E respectively, and let lines BD and CE intersect in point F , inside of triangle ABC . Prove that points A , N , F , and P all lie on one circle.

(USAMO 2008)

Úloha 9. Given a triangle ABC satisfying $AC + AB = 3 \cdot BC$. The incircle of triangle ABC has center I and touches the sides AB and AC at the points D and E , respectively. Let K and L be the reflections of the points D and E with respect to I . Prove that the points B , C , K , L lie on one circle.

(ISL 2005)

Úloha 10. In $\triangle ABC$ point D is the foot of the A -symmedian on BC . Through D draw lines parallel with AB and AC and denote their intersections with the sides AC and AB as B_1 and C_1 , respectively. Show that BCB_1C_1 is cyclic and denote its center by O_a . Similarly, define O_b and O_c and show that AO_a , BO_b , and CO_c are concurrent.

Úloha 11. In $\triangle ABC$ the B - and C -excircle touch AC and AB at points X and Y , respectively. Point I' is the image of the incenter of $\triangle ABC$ in reflection across the midpoint of BC . Show that $AXI'Y$ is cyclic if and only if $\angle BAC = 90^\circ$.
(Sharygin geometry olympiad 2012)

PÁR DALŠÍCH VZORCŮ PRO FAJNŠMEKRY

Tvrzení. Body $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ a $Z = (z_1, z_2, z_3)$ leží v přímce, právě když

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokonce platí

$$[XYZ] = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} [ABC].$$

Tvrzení. Přímky $u_i x + v_i y + w_i z$ pro $i = 1, 2, 3$ procházejí jedním bodem, právě když

$$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení. Přímky $u_i x + v_i y + w_i z$ pro $i = 1, 2$ jsou rovnoběžné, právě když

$$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení (Conway Formula). V rovině ABC je bod P . Označme φ a ψ orientované úhly PBC a BCP . Pak

$$P = (-a^2 : S_\gamma + S_\psi : S_\beta + S_\varphi),$$

kde $S_\xi = 2[ABC] \cot \xi$.

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1.

- (a) $(1 : 1 : 1), (a : b : c), (-a : b : c)$ atp.
- (b) $(1/2, 1/2, 0)$ atp., $(0, s - c, s - b)$ atp., $(0, s - b, s - c)$ atp. $2s = a + b + c$.
- (c) $(a : 0 : b + c)$.
- (d) $(S_c S_b : S_a S_c : S_b S_a), (a^2 S_a : b^2 S_b : c^2 S_c)$, kde $S_a = b^2 + c^2 - a^2$.
- (e) jako středy mezi vepsíšti / připsíšti.
- (f) $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$.

Hint 2.

- (a) $x = 0$, atp, $x = 1/2$ atp.
- (b) $y : b = \pm z : c$ atp., $y = z$, atp. $y/b^2 = \pm z/c^2$. (Pamatujte, že tečny jsou exsymediány.)
- (c) $a^2(z - y) + x(c^2 - b^2) = 0, a^2(z - y) + (1 - x)(b^2 - c^2) = 0$.
- (d) $(s - a)x - (s - b)y - (s - c)z = 0$.
- (e) $u : v : w = S_B(S_C - S_A) : S_C(S_A - S_B) : S_C(S_A - S_B)$.

Hint 3.

- (a) $a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0, v = w = 0, 3u = a^2 + b^2 + c^2, v = w = 0, u = bc$.
- (b) $u = 0, v = c^2/2, w = b^2/2$.
- (c) $u = S_A/2, v = S_B/2, w = S_C/2$.
- (d) $u = (s - a)^2, v = (s - b)^2, w = (s - c)^2$.

Hint 4. Prostě to dosaďte do rovnice pro vzdálenost. Moc se s tím neupravujte, jde hlavně o to, že takto jdou ony vzdálenosti pohodlně vyjádřit.

Hint 5. Souřadnice D určete pomocí m a n . Následně spočítejte vzdálenost AD .

Hint 6. Váhy (x, y, z) bodu P chápejte skutečně jako hmotné body. Poměry obsahů přepíšte do poměrů úseček a ty do x, y, z . Pak uhadněte faktorizaci.

Hint 7. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice a čtvrtý dosaďte.

Hint 8. Najděte souřadnice F a ověřte, že leží na kružnici. Pro kontrolu $F = (p, q, r)$, kde $p + q + r = 1$ a $r/p = c^2/(c^2 + b^2 - a^2)$ a $q/p = b^2/(b^2 + c^2 - a^2)$.

Hint 9. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice (přejděte k $x = s - a, y = s - b, z = s - c$) a ukažte, že za dané podmínky čtvrtý vyhovuje (dosazením, faktorizovat netřeba). Pro kontrolu $K = (xz : yz : (y + x)^2)$ a $L = (xy : (z + x)^2 : yz)$.

Hint 10. K první části stačí něco tušit o antirovnoběžnosti. Ke druhé stačí určit podíl B a C souřadnic bodu O_a (Ceva!). Ten najdete jako průsečík dvou os úseček. Vyjde $y/z = S_C/S_B$.

Hint 11. Sestavte rovnici kružnice a dosaďte do ní I' . Ze vzniklé identity faktorizujte $b^2 + c^2 - a^2$.

LITERATURA A ZDROJE

- [1] Schindler M., Chen. E.: *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*.
- [2] Yiu P.: *Introduction to the Geometry of the Triangle* .

TEORIE GRAFŮ

MICHAL „MIKI“ KOPF

ABSTRAKT. Probereme některé základní metody řešení grafových úloh. Další kapitoly, jako třeba Ramseyova věta a obarvování, doporučuji nastudovat samostatně.

Úloha 1. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvач vyměňuje informace se třemi pomlouvачkami a každá pomlouvачka si vyměňuje informace se třemi pomlouvачi. Jiným způsobem se pomluvy nešíří.

- Dokažte, že pomlouvачů a pomlouvачek je stejný počet.
- Předpokládejme, že síť na šíření pomluv je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvачe a libovolné pomlouvачky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že síť zůstane souvislá i poté, co jeden pomlouvач zemře.

(MO 61–B–1–5)

VEČÍRKY, PŘÁTELÉ A KLIKY

Úloha 2. Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádi. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.

- Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.
- Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$.

(MO 60–C–I–4)

Úloha 3. Mějme skupinu $2n + 1$ lidí, v níž se každá dvojice buď zná, nebo nezná. Dále platí, že pro každou množinu S maximálně n lidí existuje člověk, který nepatří do S a přitom zná všechny lidi v S . Dokažte, že alespoň jeden člověk zná všechny ostatní.

Úloha 4. Mějme skupinu n lidí, v níž se každá dvojice buď zná, nebo nezná. Splněny jsou také následující podmínky:

- Nikdo nezná všechny ostatní.
- Pokud se dva lidé neznají, pak mají právě jednoho společného známého.
- Žádní tři lidé se navzájem neznají.

Dokažte, že každý má stejný počet známých. (variacie na APMO 1990)

Definice. Klika je podmnožina vrcholů grafu G , v níž každá dvojice vrcholů je spojena hranou. Velikostí kliky rozumíme počet jejích vrcholů.

Úloha 5. Na večírku nejsou žádné 5-kliky a každé dvě 3-kliky mají nejmeně jednoho společného člena. Dokažte, že se nám vždy podaří najít dva lidi tak, aby po jejich odchodu už na večírku nezůstala žádná 3-klika.

(IMO 2001 Shortlist)

Úloha 6. Na večírku je $2n$ lidí, každý má sudý počet známých. Dokažte, že pak už tam nutně jsou dva lidé, kteří mají sudý počet společných přátel.

Úloha 7. V místnosti je 120 lidí, přičemž každí dva se buď znají, nebo neznají. Slabé kvarteto je množina čtyř lidí, z nichž právě jedna dvojice se zná. Najděte maximální možný počet slabých kvartet v místnosti. (IMO 2002 Shortlist)

Úloha 8. Na matematické soutěži jsou někteří soutěžící kamarádi (kamarádství je vzájemné). Maximální velikost kliky je zde sudá. Dokažte, že soutěžící mohou být rozděleni do dvou místností tak, aby největší kliky v obou místnostech měly stejnou velikost. (IMO 2007 – 6)

ORIENTOVANÉ GRAFY A TURNAJE

Definice. Orientovaný graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina a E je množina uspořádaných dvoubodových podmnožin (hran) množiny V . Jinak řečeno, V jsou body a E šipky mezi nimi.

Definice. Řekneme, že G je turnaj, pokud mezi každými dvěma různými vrcholy vede právě jedna šipka.

Úloha 9. Ukažte, že v každém turnaji existuje cesta přes všechny vrcholy.

Úloha 10. Nechť G je souvislý graf se sudým počtem hran. Dokažte, že každou hranu umíme nahradit šipkou tak, aby z každého vrcholu vycházel sudý počet šipek.

Úloha 11. Na turnaji se potkalo $2n + 1$ týmů. Každý hrál s každým právě jednou, přičemž nenastala žádná remíza. Řekneme, že tři týmy A , B , C jsou v kolečku, pokud A porazil B , B porazil C a C porazil A . Kolik nejmeně a kolik nejvíce koleček může na turnaji být? (Kanada 2006)

Úloha 12. Ukažte, že v turnaji n hráčů nastane právě jeden z následujících dvou případů: buď existuje n -cyklus, nebo můžeme hráče rozdělit do dvou neprázdných skupin tak, že každý hráč z první skupiny porazil každého hráče z druhé skupiny. (KMS 2008)

Úloha 13. Každá hrana v turnaji je obarvená červeně nebo modře. Dokažte, že zde najdeme vrchol v takový, že pro každý vrchol w různý od v existuje cesta z v do w jedné barvy. (Írán 2005)

Úloha 14. Hrany konvexního mnohostěnu jsou orientované jednosměrnými šipkami tak, že z každého vrcholu vychází a do každého vrcholu vstupuje alespoň jedna šipka. Dokažte, že existuje stěna, na které šipky tvoří cyklus. (KMS gama, Romania TST)

Úloha 15. Devět měst je pospojováno jednosměrnými cestami tak, že z každého města vedou právě tři cesty. Víme, že pokud vede přímá cesta z A do B , pak určitě nevede přímá cesta z B do A . Ukažte, že existuje trojice měst, mezi kterými může Artuš jezdit stále dokola.

HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE A CYKLY

Definice. Hamiltonovská cesta je cesta všemi vrcholy grafu, procházející každým vrcholem právě jednou.

Definice. Hamiltonovská kružnice je cyklus přes všechny vrcholy, obsahující každý vrchol právě jednou.

Poznámka. Pokud graf G obsahuje hamiltonovskou kružnici, říkáme, že je hamiltonovský.

Úloha 16. Nechť G je graf na n vrcholech. Nechť u, v jsou dva sousední vrcholy, pro něž platí $\deg(v) + \deg(u) \geq n$. Potom je G hamiltonovský, právě když $G + \{uv\}$ je hamiltonovský.

Věta (Diracova). *Nechť $n \geq 3$. Dále nechť graf G má n vrcholů a stupeň každého vrcholu je nejméně $\lceil n/2 \rceil$. Potom G má hamiltonovskou kružnici.*

Úloha 17. V místnosti je $2n$ lidí, z nichž každý má nejvýše $n - 1$ nepřátel. Dokažte, že všechny tyto lidi umíme posadit do kruhu za kulatý stůl tak, že žádní dva nepřátelé nesedí vedle sebe.

Úloha 18. Máme konečně mnoho měst, každé z nich spojené cestou s právě třemi dalšími. Minulý rok jsme se vydali na dovolenou, jejíž trasa byla hamiltonovskou kružnicí. Letos chceme jet na dovolenou opět po hamiltonovské kružnici, a to tak, aby naše dovolená nebyla stejná jako loni (ani opačná). Dokažte, že se nám to podaří. (Japonsko 2004)

Definice. Mějme graf G . Přiřazení M je taková množina hran v G , že žádné dvě hrany z M se nedotýkají a každý vrchol z G sousedí s některou hranou z M .

Definice. Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud existují $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = V$ takové, že žádné dva vrcholy z A , resp. B nejsou spojeny hranou.

Věta (Hallova). *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Potom existuje maximální párování mezi partitami A a B tehdy a jen tehdy, když platí tzv. Hallovo kritérium:*

$$|\Gamma(S)| \geq |S| \text{ pro každé } S \subset A,$$

kde $\Gamma(S)$ je množina všech sousedů S .

Úloha 19. Nechť G je bipartitní graf, jehož každý vrchol má stejný sudý stupeň. Dokažte, že G má perfektní¹ párování.

Úloha 20. Turnaj mezi $2n$ týmy trval $2n - 1$ dnů. Každý den odehrál každý tým právě jedno utkání, přičemž nenastala žádná remíza. Každé dva týmy spolu hrály právě jednou. Je možné za každý den vybrat právě jeden vyhrávající tým tak, abychom nevybrali jeden tým dvakrát?

Úloha 21. V tabulce $m \times n$ jsou napsána nezáporná čísla. Každý řádek a každý sloupec obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Pokud se navíc nějaký řádek a nějaký sloupec protnou v políčku s kladným číslem, pak je součet všech čísel v tomto řádku roven součtu všech čísel v příslušném sloupci. Dokažte, že $m = n$.
(Kanada 2006)

Úloha 22. Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Nechť G je mřížka, která obsahuje čísla $0, 1, -1$ tak, že v každém řádku a sloupci je právě jedna jednička a jedna minus jednička. Dokažte, že můžeme přeuspořádat řádky a sloupce tak, abychom dostali původní mřížku vynásobenou číslem -1 .
(Írán 1998)

LITERATURA A ZDROJE

- [1] <http://mks.mff.cuni.cz/library>
- [2] IMO Training 2008 Adrian Tang

¹Perfektním párováním se rozumí rozdělení grafu na disjunktní dvojice sousedních vrcholů.

KOMBINATORICKÉ (NE)POČÍTÁNÍ

MIREK OLŠÁK

ABSTRAKT. Když chceme ukázat, že dvě množiny jsou stejně velké, je často zbytečně pracné počítat jejich prvky. Může totiž stačit sestavit bijekci, či prostě jen „nahlédnout“, že je to v obou případech totéž.

Definice. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je počet možností, jak do n přihrádek umístit k nerozlišitelných kuliček, do každé nejvýše jednu.

ROZCVIČKA

Cvičení 1. Nahlédněte, že $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cvičení 2. Nahlédněte, že počet cest délky $a + b$ z levého dolního rohu do pravého horního v mřížce $a \times b$ je $\binom{a+b}{a}$.

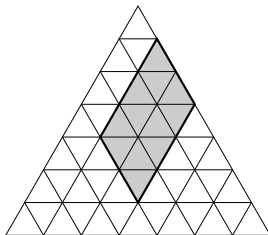
Cvičení 3. Nahlédněte, že roznásobením $(a + b)^n$ dostaneme

$$\binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a^nb^0.$$

Cvičení 4. Nahlédněte

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Cvičení 5. Nahlédněte, že počet všech rovnoběžníků v rovnostranném trojúhelníku o straně délky n s trojúhelníkovou mřížkou je $3\binom{n+2}{4}$.



VŠEHOCHUŤ

Cvičení 6. Je dáno přirozené číslo k a $n \geq k$. Uvažme náhodnou permutaci na $\{1, 2, \dots, n\}$. Nahlédněte, že pravděpodobnost, že prvky $1, 2, \dots, k$ leží v jednom cyklu, nezávisí na volbě n .

Cvičení 7. Označme x_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících podslovo $ABABA$ ani $BABAB$ a dále označme y_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících nikde pět stejných po sobě jdoucích písmen. Nahlédněte, že $x_n = y_n$.

Cvičení 8. Alča si nakreslila čtvercovou mřížku $n \times n$ a do každého políčka napsala počet všech obdélníků (a čtverců) v mřížce, které obsahují dané políčko (na obrázku je situace pro $n = 3$). Uvědomte si, že součet čísel ve všech políčkách je roven $\binom{n+2}{3}^2$. (MKS–29–3–7, Rakousko 2002)

9	12	9
12	16	12
9	12	9

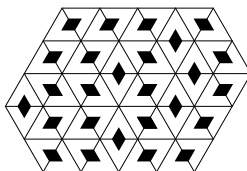
Cvičení 9. Letecká společnost provozuje (obousměrné) spoje mezi některými (neuspořádanými) dvojicemi z n měst (povolené je i neprovozovat žádný spoj či všechny). Města přitom mají různé priority. Pokud navíc existuje spoj mezi městy a, b a město c má vyšší prioritu než b , tak existuje i spoj mezi a, c . Uvědomte si, že počet možností, jaké spoje provozovat, je 2^{n-1} .

Cvičení 10. V $n - 1$ vrcholech pravidelného n -úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný sousední vrchol (jeden ze dvou), a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n - 2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Uvědomte si, že pravděpodobnost přežití každé ovce je stejná.

Cvičení 11. Jsou dána přirozená čísla a, b, c . Uvažujte všechny tabulky nezáporných celých čísel $a \times b$, v nichž všechny řádky a sloupce jsou nerostoucí a všechna čísla jsou rovna nejvýše c (levý obrázek). Na druhé straně uvažte šestiúhelník s vnitřními úhly 120° a stranami délek a, b, c, a, b, c a sadu kosočtverečků slepených ze dvou jednotkových rovnostranných trojúhelníků (pravý obrázek).

Nahlédněte, že počet tabulek je stejný jako počet možností, jak vyskládat šestiúhelník kosočtverečky.

2	2	1	1
2	2	0	0
1	1	0	0



Cvičení 12. Budte a, b nesoudělná lichá čísla. Na pravicí dlouhém ab vyznačme nejprve každou a -tou rysku, pak každou b -tou rysku, a nakonec obtáhneme každý druhý úsek mezi vyznačenými ryskami (začneme obtáhnutím prvního). Uvědomte si, že celková délka obtaženého úseku je rovna počtu černých políček na šachovnici $a \times b$, jejíž rohová políčka jsou černá.

(MKS-31-8-6, Ruský folklór)



Cvičení 13. Permutací σ na množině $\{1, 2, \dots, 2n\}$, pro něž existuje $i < 2n$ takové, že $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$, říkáme dobré. Ostatní nazýváme špatné. Uvědomte si, že dobrých permutací je více než špatných. (IMO-1989-6)

Cvičení 14. Jsou dána čísla $n \geq k$ stejné parity. V řadě stojí $2k$ lamp očíslovaných $1, \dots, 2k$. Na začátku jsou všechny zhasnuté. Jeden krok spočívá v rozsvícení zhasnuté lampy nebo zhasnutí rozsvícené. Označme X počet n -prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \dots, k$, a dále označme Y počet n -prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \dots, k$, přičemž byly přepínány pouze tyto lampy. Rozmyslete si, že

$$\frac{X}{Y} = \frac{2^n}{2^k}.$$

(IMO-2008-5)

Cvičení 15. Je dáno $n \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \dots, n$. Z bodu s menším číslem vede vždy šípka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B . Uvědomte si, že počet jednobarevných obarvení je $n!$. (ARO-2005)

Cvičení 16. Adam a Bedřich hrají i KS-tenis na n míčků. Pokaždé jeden hráč podává míček a některý z hráčů tento míček vyhraje. V okamžiku, kdy má někdo

vyhráno n míčků, vyhrává celý zápas. První míček podává Adam a dále mohou být dvě schémata podávání: a) podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček, b) hráči se v podání se pravidelně střídají. Předpokládejme, že pravděpodobnost výhry míčku závisí vždy jen tom, který hráč podával. Rozmyslete si, že celkové šance hráčů na výhru zápasu nezávisí na volbě schématu.

Cvičení 17. Označme $D(n)$ počet permutací na n prvcích bez pevného bodu. Uvědomte si, že

$$D(n) + \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots = n! + \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{4}(n-4)! + \cdots.$$

Cvičení 18. Jako plné n -tice přirozených čísel budeme označovat ty, ve kterých pro každé $i \geq 2$, jež se v n -tici vyskytuje, platí, že se v n -tici vyskytuje i $i-1$, přičemž první výskyt $i-1$ je před posledním výskytem i . Rozmyslete si, že plných n -tic je $n!$. (IMO Shortlist 2002)

Cvičení 19. Označme $G(n)$ počet všech možných stromů (souvislých grafů bez kružnic) na daných n vrcholech. Bijektivně ukažte

$$n^n = G(n) \cdot n^2.$$

Cvičení 20. Bijektivně ukažte

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

ROZKLADY

Definice. Rozkladem čísla n délky $k \geq 1$ rozumíme konečnou nerostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1, \dots, a_k$ splňující $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Cvičení 21. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ délky n .

Cvičení 22. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n délky k je stejný jako počet rozkladů n , kde $a_1 = k$.

Cvičení 23. Rozklad nazveme symetrický, pokud pro každé i udává a_i počet prvků rozkladu velkých alespoň i . Uvědomte si, že symetrických rozkladů čísla n je stejně jako těch rozkladů čísla n , kde jsou jednotlivá a_i různá a současně lichá.

Cvičení 24. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n , ve kterých jsou všechna a_i různá, je stejný jako počet rozkladů čísla n , ve kterých jsou všechna a_i lichá.

Cvičení 25. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n , které neobsahují druhou mocninu přirozeného čísla, je stejný jako počet rozkladů čísla n , ve kterých se každé číslo i vyskytuje nanejvýš $(i - 1)$ -krát.

FIBONACCIHO ČÍSLA

Definice. Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n - 1) \times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1 , nazýváme n -tým Fibonacciho číslem a značíme F_n .

Cvičení 26. Nahlédněte, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n - 1) \times 2$ dominovými kostičkami je roven F_n .

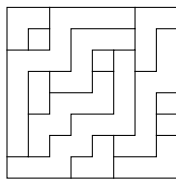
Cvičení 27. Nahlédněte

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b.$$

Cvičení 28. Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $(n + 1) \times 1$ na dílky větší než 1×1 , je F_n .

Cvičení 29. Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $n \times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je F_n .

Cvičení 30. Hadem označme konečnou posloupnost čtverečků v mřížce takovou, že každý následující čtvereček je těsně nad předchozím nebo těsně vpravo od něj. Rozmyslete si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $a \times b$ pomocí hadů, je součinem několika (ne nutně různých) Fibonacciho čísel. Na obrázku je ukázka vyskládaného čtverce 8×8 .



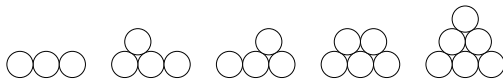
CATALANOVA ČÍSLA

Definice. Počet všech cest délky $2n$ ve čtvercové mřížce $n \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou celé nad odpovídající úhlopříčkou, nazýváme n -té Catalanovo číslo a značíme jej C_n .

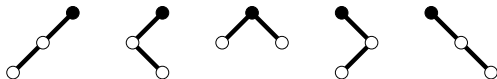
Cvičení 31. Uvědomte si, že C_n je rovno počtu náhrdelníků s n bílými a $n + 1$ černými korálky, přičemž náhrdelníky lišící se pouze otočením (nikoli překlopením) považujeme za nerozlišitelné. Na základě toho odvoďte

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Cvičení 32. Nahlédněte, že počet možností, jak na sebe poskládat pyramidu z mincí se spodní řadou o n mincích (viz obrázek), je roven C_n .

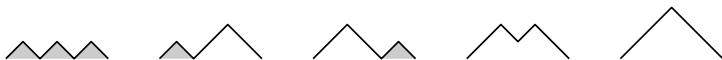


Cvičení 33. Rozmyslete si, že C_n udává počet zakořeněných binárních stromů na n vrcholech, kde rozlišujeme pravé a levé syny.



Cvičení 34. Na základě předchozího cvičení nahlédněte, že počet možností, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$ -úhelník na n trojúhelníků, je C_n .

Cvičení 35. Dyckovou n -cestou rozumíme cestu o $2n$ krocích zprava doleva, která začíná ve výšce 0, v každém kroku popojde o 1 šikmo nahoru nebo o 1 šikmo dolů, končí ve výšce 0 a nikdy nejde do záporné výšky. Kopečkem v Dyckově n -cestě rozumíme vrchol ve výšce 1, jehož oba sousední vrcholy leží ve výšce 0. Rozmyslete si, že počet všech kopečků ve všech Dyckových n -cestách je stejný jako počet všech Dyckových n -cest (což je zřejmě rovno C_n).

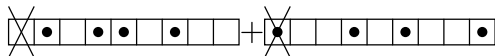


Cvičení 36. Obrazcem délky n rozumíme neuspořádanou dvojici cest v mřížce délky n vedoucích pouze doprava a nahoru, a navíc takových, že se potkají pouze v prvním a posledním bodě. Bijektivně ukažte, že počet obrazců délky n je C_{n-1} . Na obrázku jsou dva obrazce délky 9. (MKS-26-4-8)



HINTY KE CVIČENÍM

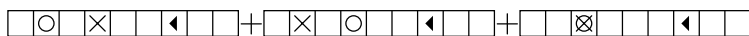
Hint 1.



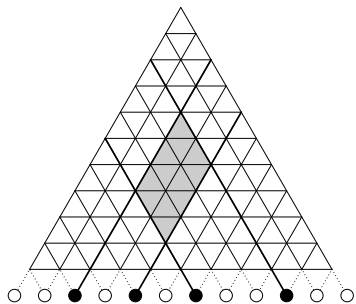
Hint 2. Právě a ze všech $a+b$ kroků povede vodorovně.

Hint 3. Sčítanec $a^i b^{n-i}$ dostaneme tolikrát, kolik je možností, jak v i závorkách vybrat a a ve zbylých $n-i$ vybrat b .

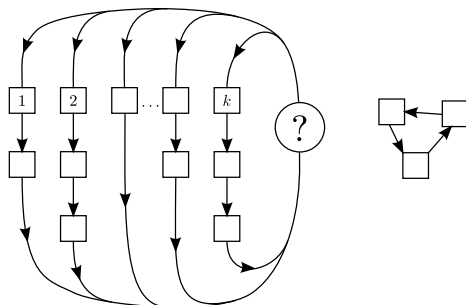
Hint 4.



Hint 5.

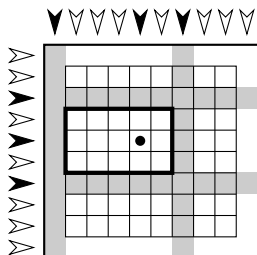


Hint 6.

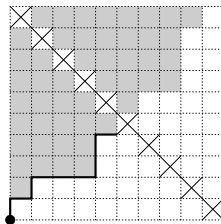


Hint 7. Invertujte každou druhou pozici.

Hint 8.

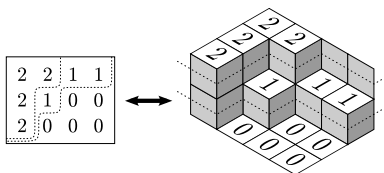


Hint 9.

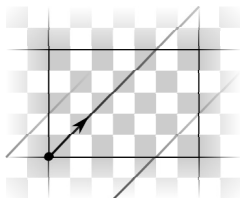


Hint 10. Každá ovce si všimne vlka až v okamžiku, kdy se poprvé octne vedle ní.

Hint 11.



Hint 12.



Hint 13. Ve špatné permutaci přesuňte první prvek ke svému „kamarádovi“.

Hint 14. Vyjádřete pomocí X , případně Y , počet těch n -prvkových posloupností kroků takových, že na konci bude pro každé $i \leq k$ svítit právě jedna z dvojice lamp $i, k + i$.

Hint 15. Obráťte červené šipky.

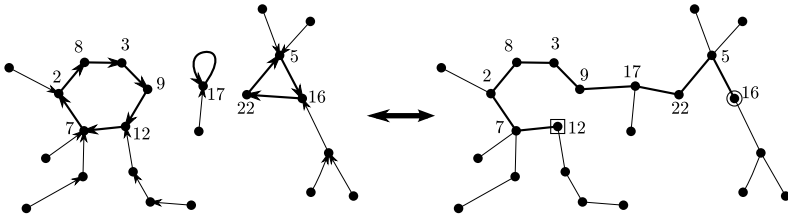
Hint 16. Kolikrát nejvýše mohou podávat jednotliví hráči v jednotlivých schématech? Karty osudu jsou rozdány, na hře nezáleží.

Hint 17. Interpretujte jako permutace, ve kterých je obarven lichý, resp. sudý počet pevných bodů. Pak stačí invertovat první pevný bod. Obdobný přístup lze použít i na důkaz obecného principu inkluze a exkluze.

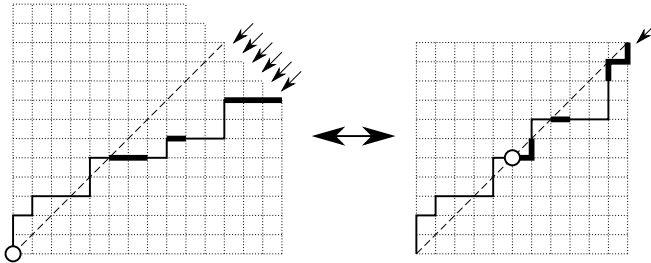
Hint 18.

$$2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3 \Leftrightarrow 6, 3, 5, 2, 4, 1, 8, 7$$

Hint 19.

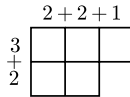


Hint 20.

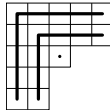


Hint 21. V rozkladu délky n snižte každý sčítanec o 1.

Hint 22.



Hint 23.



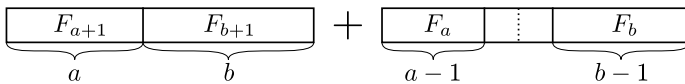
Hint 24.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 1 + 4 + 3 + 6$$

Hint 25. Nahrazujte v prvním typu rozkladů vždy k stejných čísel k za číslo k^2 .

Hint 26. Stačí první řádek.

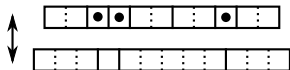
Hint 27.



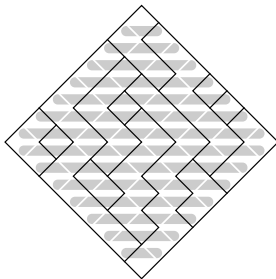
Hint 28.



Hint 29.

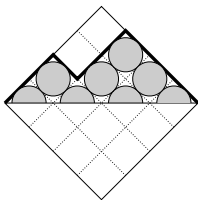


Hint 30.

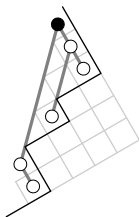


Hint 31. Černá = nahoru, bílá = doprava. Existuje právě jedno natočení náhrdelníku takové, že jej držíme za černý korálek a zbylá cesta vede nad úhlopříčkou.

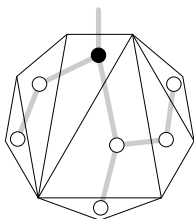
Hint 32.



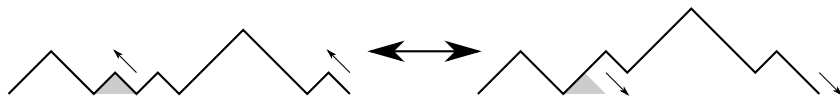
Hint 33.



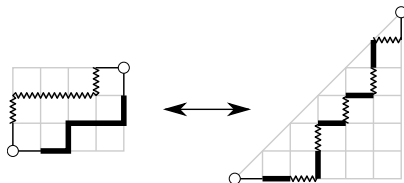
Hint 34.



Hint 35.



Hint 36.



LITERATURA A ZDROJE

- [1] Richard P. Stanley: *Bijjective proofs problems*, <http://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf>
- [2] Yufei Zhao: *Bijections*, <http://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf>

PĚKNÉ TECHNIKY V NEROVNOSTECH

PAVEL ŠALOM

ABSTRAKT. Příspěvek ukazuje pokročilé techniky pro elegantní důkazy nerovností. Důraz je kladen na důmyslné používání Cauchy-Schwarzovy nerovnosti (nejčastěji ve formě „zlomkobijce“). Většina úloh je převzata z knihy *Inequalities with Beautiful Solutions*.

Připomeneme dvě nejčastěji používané nerovnosti. Těmi jsou AG nerovnost a Cauchy-Schwarzova nerovnost (CS).

Tvrzení (AG nerovnost). *Pro kladná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí*

$$x_1 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Tvrzení (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Pro libovolná reálná čísla $u_1, \dots, u_n$ a $v_1, \dots, v_n$ platí*

$$(u_1^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)^2.$$

Nejčastěji budeme CS nerovnost používat ve formě, které budeme říkat CS zlomkobijec.

Tvrzení (CS zlomkobijec). *Pro kladná reálná čísla $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ platí*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

Na přednášce si rychle připomene myšlenky důkazů.

V posledních letech se teorie kolem „elementárních“ nerovností rychle rozvinula, a tak jsou na světě velice silné metody na jejich dokazování. Zmíníme například metody *Sum of Squares*, *Mixing Variable Method*, *ABC Method* nebo silné a obecné nerovnosti *RCF Theorem* – *Right Convex Function Theorem*, *LCF Theorem*, *Vornicu-Schur inequality* atd. Těmito silnými nástroji se nebudeme zabývat, dáme tentokrát přednost krásným postupům a trikům, nad nimiž zůstává rozum stát. Doslova!

Úloha 1 (Obrácení nerovnosti). Pro kladná a, b, c se součtem 3 dokažte, že

$$\sum \frac{a}{1+b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

(Bulgaria TST 2003)

Řešení. Nejdříve dvě pozorování, která k řešení nevedou. Kdyby zlomky byly tvaru $\frac{a}{1+a^2}$, umíme rychle dokázat obrácenou nerovnost, neboť

$$\sum \frac{a}{1+a^2} \leq \sum \frac{a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

Při podobném postupu v našem případě děláme první odhad na špatnou stranu, ale jinak to nevypadá úplně zle. Platí

$$\sum \frac{a}{1+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\sum \frac{a}{b} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sum \frac{a}{b} \right) \geq \frac{3}{2}.$$

A teď jak z toho ven!

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Pro platnost původní nerovnosti bude stačit dokázat, že

$$\sum a - \frac{1}{2} \left(\sum ab \right) = 3 - \frac{1}{2} \left(\sum ab \right) \geq \frac{3}{2},$$

tedy že

$$\sum ab \leq 3.$$

Poslední nerovnost je však přímým důsledkem známé nerovnosti

$$3 \left(\sum ab \right) \leq \left(\sum a \right)^2 = 9.$$

Úloha 2 (Zlomkobijec pozpátku). Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum \frac{a}{2a+b+c} \leq \frac{3}{4}.$$

(Vasile Cirtoaje, zjednodušená varianta)

Řešení. Opět nejdříve ukážeme úvahu, která nás k řešení nijak nepřiblíží. Ještě předtím poznamenejme, že s trochou odvahy se dá nerovnost roznásobit a vzhledem k tomu, že nerovnost je jen symetrická a že stupeň roznásobené nerovnosti bude tři, lze oprávněně doufat ve vítězství.

Pro méně odvážné se zdá být CS zlomkobijec v první chvíli pěkným nápadem, protože se elegantně vypořádá se jmenovateli. To vše je ale pěkné jen do chvíle,

než zaregistrujeme, že zlomkobijec odhaduje nerovnost na opačnou stranu, než chceme. Jinak ale

$$\begin{aligned}\sum \frac{a}{2a+b+c} &= \sum \frac{a^2}{2a^2+ab+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2\sum a^2+2\sum ab}, \\ \frac{(a+b+c)^2}{2\sum a^2+2\sum ab} &\leq \frac{3}{4},\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost je jen převlečená nerovnost $\sum ab \leq \sum a^2$.

A teď jak z toho zase ven!

$$\begin{aligned}\sum \frac{a}{2a+b+c} &= \sum a \frac{1}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \sum a \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} \right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, jak vypadal jmenovatel jsme si dovolili použít zlomkobijce přesně pozpátku než je to běžné.

Poznamenejme, že v této úloze lze postupovat i podobně jako v předchozí. Lze totiž využít rovnosti

$$\frac{2a}{2a+b+c} = 1 - \frac{b+c}{2a+b+c},$$

čímž se nerovnost obrátí. Potom můžeme použít klasického zlomkobijce a opět zjistíme, že dostaneme jen převlečenou nerovnost $\sum ab \leq \sum a^2$.

A TEĎ VY!

Úloha 3. Pro kladná čísla a, b, c, d dokažte, že platí nerovnost

$$\sum \frac{a^4}{a^3+2b^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 4 (na rozehrátí). Pro kladná čísla a, b, c, d dokažte dvě nerovnosti:

$$4(ab+bc+cd+da) \leq \left(\sum a\right)^2, \quad 16\left(\sum abc\right) \leq \left(\sum a\right)^3.$$

První nerovnost přitom platí pro libovolná reálná čísla. (známé nerovnosti)

Úloha 5. Předpokládejme, že součet kladných čísel a, b, c, d je 4. Dokažte, že potom

$$\sum \frac{a+1}{b^2+1} \geq 4.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 6. Předpokládejme, že součet kladných čísel a, b, c, d je 4. Dokažte, že potom

$$\sum \frac{ab+1}{b^2c^2+1} \geq 4.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 7. Předpokládejme, že součet kladných čísel a, b, c, d je 4. Dokažte, že potom

$$\sum \frac{a}{1+b^2c} \geq 2.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 8. Necht' součet kladných čísel a, b, c je 3. Dokažte, že

$$\sum \frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

(neznámý zdroj)

Úloha 9. Necht' pro nezáporná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokažte, že potom

$$\sum \frac{bc}{a^2+1} \leq \frac{3}{4}.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 10. Necht' pro nezáporná čísla a, b, c platí $ab + bc + ca = 3$. Dokažte, že

$$\sum \frac{1}{a^2+2} \leq 1.$$

(neznámý zdroj)

Úloha 11. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum \frac{a^2 - bc}{4a^2 + 4b^2 + c^2} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Úloha 12. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum \frac{ac}{4a+4b+c} \leq \frac{a+b+c}{9}.$$

(Pham Kim Hung, zjednodušená verze)

Úloha 13. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum \frac{a}{4a+4b+c} \leq \frac{1}{3}.$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 14. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum \sqrt{\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2}} \leq 1.$$

(slavná nerovnost z projevu při zahájení MO 2009, Pham Kim Hung)

Úloha 15 (pěkná podmínka). Nechtě nezáporná čísla a, b, c splňují $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. Dokažte, že potom

$$ab + bc + ca \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

(Vasile Cirtoaje)

Úloha 16. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum \frac{a^3}{2a^2 + bc} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 3. Zlomky vyjádřete jako rozdíl s následnou myšlenkou použít AG na jmenovatele.

Hint 4. První nerovnost lze upravit na čtverec. Ve druhé nerovnosti jde jen o to, rozmyslet si, že členy vpravo lze vhodně seskupit do několika AG.

Hint 5. Po standardním triku použijte jednu z rozechřívacích nerovností.

Hint 6. Tentokrát přemýšlejte, jak jednu z rozechřívacích nerovností využít po nějaké substituci.

Hint 7. Pokud váháte, jak dokázat nerovnost, která zbyde po standardním triku, tak přemýšlejte o nějakém AG, které nerovnost převede na něco příjemnějšího – konkrétně na rozechřívací nerovnosti.

Hint 8. Je potřeba si situaci naštětovat pro použití zlomkobijce pozpátku. To se dá udělat homogenizací.

Hint 9. Homogenizace je brnkačka. Pořád je ale potřeba si inverzního zlomkobijce předpřipravit. Využijte nerovnost $4ab \leq (a + b)^2$.

Hint 10. Není jasné, kdy a jak nejlépe využít podmínku. Napište každý zlomek jako rozdíl. Potom by mělo být vidět, že zlomkobijec s následnou homogenizací úlohu řeší.

Hint 11. Zlomky přepište jako rozdíl a potom hledejte zlomkobijce pozpátku.

Hint 12. Je potřeba chvilku se zamyslet, jak rozdělit jmenovatel pro použití zlomkobijce pozpátku. Při jeho použití dejte pozor na to, aby mohla nastat rovnost pro $(1,1,1)$!

Hint 13. Vyzkoušejte si přímočaré použití zlomkobijce pozpátku a zjistěte, v čem je problém. Namísto a by se v čitateli spíše hodil nějaký smíšený člen podobně jako v předchozí úloze. Přijďte na to, který, a jak docílit toho, abychom jej tam měli!

Pokud stále nevíte, zkuste nějak využít toho, že $4a(a+b+c) - a(4a+4b+c) = 3ac$.

Hint 14. Použijte (úplně obyčejnou) Cauchyho nerovnost pro zbavení se odmocnin. Potom nezbývá než si přiznat, že pomocí předchozích nerovností už byla tato v podstatě vyřešena.

Hint 15. Pracujte s druhou mocninou podmínky a nerovnost podle toho přeformulujte. Nedostali jste nerovnost, kterou znáte? (Pokud ne, věřte, že to je Hölderova nerovnost.)

Hint 16. Zlomek přepište jako rozdíl. Potom stačí obyčejný zlomkobijec. Jeho jmenovatel odhadněte pomocí součtu druhých mocnin. Nakonec zbyde Schurova nerovnost.

LITERATURA A ZDROJE

- [1] Vo Quoc Ba Can, Vasile Cirtoaje, Tran Quoc Anh: *Inequalities with Beautiful Solutions*.
- [2] Pham Kim Hung: *Secrets in Inequalities*.
- [3] fórum Mathlinks, především příspěvky od uživatelů Vasc, can_hang2007

FUNKCIONÁLNE ROVNICE NAD REÁLNYMI ČÍSLAMI

VIKTOR LUKÁČEK

ABSTRAKT. V príspevku sa nachádzajú funkcionálne rovnice, na ktorých vyriešenie sa používajú mnohokrát menej známe spôsoby.

Na vyriešenie funkcionálnej rovnice častokrát stačí správne dosadiť, porovnať a využiť zistené vzťahy. Nasledujúce príklady je možné len ťažko vyriešiť iba týmto spôsobom. Veľmi dobre sa dajú využiť vlastnosti funkcií, ako napríklad surjektivita (to znamená, že obor hodnôt je celá množina, do ktorej funkcia ide), prostosť (dvom rôznym prvkom sa nepriradí ten istý) a iné. Funkcia je nepárna, ak pre všetky x platí $-f(x) = f(-x)$, a párna, ak $f(x) = f(-x)$. Pevný bod je každý prvok x , pre ktorý $f(x) = x$.

V nasledujúcich úlohách sa budeme zaoberať najmä funkciami typu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ a môžeme v nich využiť: prácu s oborom hodnôt nielen spôsobom, že f je surjektívna, nerovnosti, pri ktorých treba dosadiť napríklad tak, aby sme zistili, že funkcia je rastúca, pevné body, potom možno využiť prostosť, nepárnosť, vytváranie inej funkcie, pre ktorú pôjde niečo dokázať ľahšie, periodickosť, zaviesť rôzne postupnosti, monotónnosť a samozrejme kombinovať to s vhodnými substitúciami.

VYUŽITIE OBORU HODNÔT

Úloha 1. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Úloha 2. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(y) = f(f(x)f(y)).$$

Úloha 3. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy.$$

Úloha 4. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y.$$

NEROVNOSTI

Úloha 5. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

Úloha 6. Dokážte, že neexistuje funkcia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y).$$

Úloha 7. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňa pre všetky $x \in \mathbb{R}$

$$f^2(x) \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$$

a pre $x \in (-1, 1)$ platí $f(x) \leq 1$. Dokážte, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

Úloha 8. Nech funkcia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ spĺňa pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(2x) \geq x + f(f(x)).$$

Dokážte, že pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$ platí $f(x) \geq x$.

Úloha 9. Dokážte, že neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúca pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ $f(0) > 0$ a zároveň

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)).$$

PEVNÝ BOD

Úloha 10. Nech $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je kvadratická funkcia taká, že funkcia $g(g(x)) - x$ má aspoň 3 korene. Dokážte, že neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúca pre všetky $x \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)) = g(x).$$

Úloha 11. Nech S je množina všetkých reálnych čísel väčších ako -1 . Nájdite všetky funkcie $f: S \rightarrow S$ splňujúce pre všetky $x, y \in S$

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

a zároveň funkcia $\frac{f(x)}{x}$ je na intervaloch $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$ rastúca.

RÔZNE

Úloha 12. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

Úloha 13. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Úloha 14. Dokážte, že každá funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúca pre všetky $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f\left(x + \frac{13}{42}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

a zároveň $|f(x)| \leq 1$ je periodická.

Úloha 15. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

Úloha 16. Nájdite všetky monotónne funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňujúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xy)f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Z voľby $y = -f(x)$ máme, že je surjektívna. Voľbou takého x , aby $f(x) = 0$, a vyjadrením $z = f(y) - f^{-1}(0)$ dostaneme, čo chceme.

Hint 2. Súčet ľubovoľných dvoch čísel z oboru hodnôt je tam tiež. Ako potom možno dvakrát dosadiť, aby výrazy na pravej strane boli rovnaké?

Hint 3. Voľbou $y = 0$ dostaneme funkčné hodnoty pre prvky v obore hodnôt, použitím tohto vzťahu do zadania so správnym dosadením dostaneme, že 0 je v obore hodnôt.

Hint 4. Dosadením takého x , že $f(x) = 0$, dostaneme vzťah, ktorý možno použiť pri porovnaní pôvodného vzťahu so vzťahom po dosadení $x = f(x)$.

Hint 5. Treba sa pokúsiť najprv určiť $f(1)$ a potom vhodným dosadením ohraničiť zdola $f(x)$ a potom aj zhora.

Hint 6. Pokúste sa upraviť nerovnosť tak, aby $f(x) - f(x+y)$ bolo na väčšej strane a aby sa na tej menšej nevyskytoval výraz $f(x+y)$. Čo potom platí pre túto funkciu? Dosadte $x = x + k/n$ a $y = 1/n$ do tejto nerovnosti. Ako možno zvoliť n , aby sme mohli túto nerovnosť ohraničiť zdola? Čo potom dostaneme pre $k = 0$ až $n - 1$? Čo potom platí pre výraz $f(x) - f(x+m)$? Ako možno zvoliť m , aby sme došli k sporu?

Hint 7. Vytvorte funkciu g z funkcie f , pre ktorú chceme ukázať ohraničenosť nezávislú na x . Čo potom platí pre $g^{2^n}(x)$? Čo z toho vyplýva pre $g(x)$ pre dosť veľké n ?

Hint 8. Platí $f(x) \geq \frac{1}{2}x$? Ako potom možno lepšie odhadnúť $f(x)$? Dá sa potom vytvoriť postupnosť?

Hint 9. Čo možno povedať pre $y \leq 0$, ak pre všetky x platí $f(f(x)) \leq 0$? Ukážte, že je to v spore s $f(0) > 0$. Potom možno dosadiť do x takú hodnotu, aby sme ukázali, že f je pre ľubovoľnú konštantu od istého x väčšia ako táto konštanta. Potom môžete ukázať, že od istého čísla je f rastúca, a potom aj $f(x) \geq cx$ pre ľubovoľné c .

Hint 10. Ukážte, že ak a je pevný bod funkcie g , tak aj $f(a)$ je. Podobne pre $g(g(x))$ potom ukážte, že nemôže nastať, aby bolo a pevným bodom $g(g(x))$ ale nie pre g a zároveň aby $f(a)$ bolo pevným bodom g . Čo potom platí pre g obraz pevného bodu $g(g(x))$, ktorý nie je pevným bodom $g(x)$?

Hint 11. Čo sa stane, ak po dosadení $y = x$ pre nejaké x platí, že výraz na pravej strane je nenulový? Z rastu funkcie na oboch intervaloch potom vyplýva, že existuje maximálne jeden pevný bod na oboch intervaloch. Dosadte ho za x .

Hint 12. Dosadte $y = -y$, porovnajte so zadáním a vyvoďte z toho nepárnosť. Dosadte $x = y$, využite nepárnosť a porovnajte $f(2x)$ a $f(-2x)$.

Hint 13. Substituuajte $u = x + y$ a $v = x - y$. Čím možno podeliť, aby sme mohli dostať na oboch stranách iba jednu premennú?

Hint 14. Postupným dosadzovaním napr. $x = x + k/6$ vyjadrite $f(x+1) - f(x)$. Funkcia $g(x) = f(x+1) - f(x)$ je periodická. Vyjadrite $f(x+n) - f(x)$ pomocou g , využite jej periodickosť a podmienky zo zadania na ukázanie, že $g(x) = 0$.

Hint 15. Dosadte do y taký výraz, aby v argumente funkcií vznikol rovnaký výraz. Z toho plynie, že pre každé x platí $f(x) = 0$ alebo $f(x) = x^2$. Ak existuje a také, že $f(a) \neq a^2$, potom $f(a) = 0$. Dosadte $x = a$ a potom $x = 0$ na zistenie toho, že f je periodická s periódou a^2 . Ďalej dosadte $y = a^2$, využite periódu a ešte vzťah, ktorý vznikne po dosadení $y = 0$.

Hint 16. Z dosadení $1, x$ a $f(f(x))$, $f(x)$ vyvoďte $f(1) = 1$ a predpokladajte, že pre nejaké $t \neq 1$ platí $f(t) = 1$. Čo treba dosadiť, aby platilo $f(x) = f(tx)$? Potom platí $f(1) = f(t^k)$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$. Teraz si stačí uvedomiť monotónnosť.

LITERATÚRA A ZDROJE ÚLOH

- [1] Titu Andreescu, Iurie Boreico: *Functional equations, electronic edition, 2007*
- [2] Vít Musil: *Funkcionální rovnice*
- [3] Vietnam 1991

- [4] Belarus 1995, 1997
- [5] Bulgaria 1998
- [6] China 1998
- [7] Tournament of the towns 1996
- [8] IMO 1994, 2002
- [9] Shortlist 1997
- [10] CSP 1997
- [11] BMO 1997

Obsah

Aritmetické vlastnosti polynómov (Filip Sládek)	3
Posloupnosti v teorii čísel (Michael „Majkl“ Bílý)	10
Dvoupoměr a poláry (Pepa Tkadlec)	16
Barycentrické souřadnice (Michal „Kenny“ Rolínek)	21
Teorie grafů (Michal „Miki“ Kopf)	27
Kombinatorické (ne)počítání (Mirek Olšák)	31
Pěkné techniky v nerovnostech (Pavel Šalom)	42
Funkcionálne rovnice nad reálnymi číslami (Viktor Lukáček)	48