Zadání 3. série

Termín odeslání: 18. září

Adresa: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha G3. Budiž dán trojúhelník ABC, kde $|AB| \neq |BC|$, s kružnicí opsanou k. Osa vnitřního úhlu $\sphericalangle ABC$ protne stranu AC v bodě D. Dále ať M je středem oblouku kružnice k vymezeného body A, C, který obsahuje bod B. Kružnice opsaná trojúhelníku BDM protíná přímku AB podruhé v bodě J. Označme dále K obraz bodu A ve středové souměrnosti podle J. Konečně ať L je průsečík přímek AM a DK. Dokažte, že body K, L, M, B leží na jedné kružnici.

Úloha C3. iKSko řeší stálých $2n$ studentů, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Přitom každý rok právě n z nich jede na IMO. Bylo by pěkné, kdyby spolu každí dva řešitelé byli alespoň na jednom. Kolik let nejméně je potřeba, aby se jim to mohlo podařit?

Úloha A3. Mějme n přirozené. Na černé nástěnné křídové tabuli jsou napsaná po dvou různá nenulová reálná čísla x_i pro i od 1 do n. Navíc, na bílé magnetické tabuli se stojanem jsou napsaná čísla $x_i + \frac{(-1)^i}{x_i}$ pro i od 1 do n. Rozhodněte, pro která n mohou být na obou tabulích stejná čísla.

Úloha N3. Najděte všechna přirozené čísla n taková, že pro libovolné přirozené k existuje přirozené a splňující $n \mid a^3 + a - k$.