Řešení 4. série

Úloha N4. *Mirek si myslí 2016 celých čísel. Rado chce tato čísla zjistit, proto mu položí několik otázek. Každá otázka má tvar polynomu v 2016 proměnných s celočíselnými koeficienty. Mirek do tohoto polynomu svoje čísla v nějakém pořadí dosadí a oznámí Radovi hodnotu, která vyjde. Dokažte, že Radovi stačí jedna otázka, aby zjistil všechna čísla, na která Mirek myslel.*

Řešení. Učiníme tři užitečná pozorování, se kterými se řešení stane zřejmým.

Pozorování 1.
Předpokládejme, že polynom ve dvou proměnných $P(x, y)$ s celočíselnými koeficienty poskytuje prosté zobrazení $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tedy každým dvěma různým uspořádaným dvojicím celých čísel přiřadí různá celá čísla. Pak ale stačí volit polynom ve 2016ti proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ jako $P(x_1, P(x_2, P(x_3, \ldots)))$. To je opět polynom s celočíselnými koeficienty. Navíc z něj umíme určit čísla x_1 a $P(x_2, P(x_3, \ldots))$, postupně tedy umíme určit všechny čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$.

Pozorování 2.
Existuje polynom ve dvou proměnných s celočíselnými koeficienty, který poskytuje prosté zobrazení $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Ukážeme polynom $Q(x, y)$, který dokonce poskytuje bijekci mezi těmito množinami. Volme $Q(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + 1)(x + y) + x$. Ten odpovídá vyplnění tabulky $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ postupně po konečných diagonálách čísly z $\mathbb{N}_0$ (jak lze snadno početně ověřit). Takto zkonstruované zobrazení je zjevně hledaná bijekce a dokonce je opravdu určeno polynomem. Konečně polynom $2Q(x, y)$ tedy také určuje prosté zobrazení a navíc už má celočíselné koeficienty.[1]

Pozorování 3.
Existuje polynom v jedné proměnné s celočíselnými koeficienty poskytující prosté zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$. Takový polynom už je opravdu jednoduché vymyslet, stačí vzít třeba $R(x) = 2x^2 + x$. Triviálně $R(x) \geq 0$ pro všechna celá (reálná) x. Navíc má celočíselné koeficinty. Stačí tedy ověřit prostotu. Předpokládejme $R(x) = R(y)$ Pak ale $2x^2 + x = 2y^2 + y$, což upravíme na $(x - y)(2x + 2y + 1) = 0$. Jenže druhá závorka je lichá, a tak už musí být $x = y$, čímž je prostota dokázána. (Podobně umíme prostotu nahlédnout z faktu, že čtverce celých čísel jsou od sebe dostatečně daleko.)

Dohromady tedy stačí dosadit Mirkova čísla do polynomu $R(x)$ z Pozorování 3, čímž je prostě zobrazíme na čísla z $\mathbb{N}_0$. Následně už můžeme použít polynom $2Q(x, y)$ z Pozorování 2, který poskytuje prosté zobrazení $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Ten vezmeme jako $P(x)$ z Pozorování 1 a uvážíme složený tvar, ke kterému jsme v tomto pozorování dospěli. Dohromady tak získáváme polynom s celočíslenými koeficienty ve 2016-ti proměnných, který poskutuje prosté zobrazení $\mathbb{Z}^{2016} \to \mathbb{N}_0$, což jsme přesně hledali (Rado tak z Mirkovy odpovědi umí poznat všech 2016 čísel, a to dokonce i včetně jejich pořadí).

Jiné řešení (*na motivy řešení Radeka Olšáka a Petra Gebauera*)

Využijeme jednoznačný zápis v pozičních soustavách (přičemž Mirkova čísla využijeme jako cifry). Aby ale takový přístup fungoval, musíme vyřešit tři nástrahy.

(i) Za prvé, používaná soustava musí mít základ vyšší, než všechny používané cifry (tedy Mirkova čísla v absolutní hodnotě). Toho ale docílíme celkem snadno, stačí vzít jako základ $n = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

(ii) Dále je třeba vyřešit, co se zápornými čísly. Na to však stačí přiřadit nenulové koeficienty pouze sudým mocninám n, tedy uvažovat polynom $\sum_{i=0}^{2015} x_i \cdot n^{2i}$. Pokud budeme znát základ

[1] Najít nějaký vyhovující polynom je ale celkem lehké - stačí vyžít faktu, že "čtverce jsou od sebe daleko". Vhodným kandidátem je třeba $(a + b)^2 + b$

n, čtením zprava po dvojicích cifer získáme jednoznačně čísla x_i. Přitom je třeba si ještě dát pozor, jestli je hodnota polynomu kladná či záporná - búno nechť je kladná, jinak stačí změnit její znaménko i znaménka hledaných čísel. Při čtení zprava je potom pro kladné x_i pouze pravá cifra ze čtené dvojice nenulová, pro záporné x_i jsou nenulové obě. V prvém případě rovnou získáváme hledanou cifru, v druhém je třeba odčítat od n^2.

(iii) Nakonec je nutné, abychom z výsledku polynomu uměli zpětně zjistit, která soustava byla použita (tedy najít n). K tomu ale stačí k celému polynomu přičíst dostatečně vysokou mocninu n (nebo něco většího). Konkrétně pokud polynom obsahuje jako nejvyšší mocninu základu n^{4030}, stačí k němu přičíst $n^{2\cdot 4031}$.

Ukážeme, že se hodnoty dvou takových polynomů s jinými základy a argumenty splňujícími podmínku (i) nemohou rovnat. Přesněji, dokážeme, že pro menší základ je i hodnota našeho polynomu vždy menší. Stačí tedy ukázat ostrou nerovnost pro základy n, $n+1$ (a tu případně použít několikrát za sebou). Platí

$$n^{2\cdot 4031}+\sum_{i=0}^{2015} x_i\cdot n^{2i} < n^{2\cdot 4031}+n^{4031} < (n+1)^{2\cdot 4031}+\sum_{i=0}^{2015} y_i\cdot (n+1)^{2i},$$

kde $n\geq 2$ je přirozené, x_i jsou celá čísla splňující $-n < x_i < n$ a y_i jsou celá čísla splňující $-(n+1) < y_i < n+1$.

První nerovnost platí díky jednoznačnému zápisu čísel v soustavě o základu n, neboť takový zápis přičítané sumy má nejvýše 4031 cifer. Ke druhé nerovnosti pouze využíváme analogického odhadu $\sum_{i=0}^{2015} y_i\cdot(n+1)^{2i}\geq -(n+1)^{4031}$ společně s lehkou polynomiální nerovností $n^{2\cdot 4031}+n^{4031}+(n+1)^{4031} < (n+1)^{2\cdot 4031}$ (která okamžitě vyplývá třeba z binomické věty).

Právě dokázaná nerovnost je ale přesně to, co jsme chtěli - hodnoty polynomu jsou "seřazeny"podle toho, jaká soustava byla použita při výpočtu použita, tedy z jeho hodnoty lze soustavu zpětně získat. Tím jsme hotovi.

Dohromady tak získáváme polynom, který zajisté určuje prosté zobrazení $\mathbb{Z}^{2016}\to\mathbb{N}_0$, čímž jsme hotovi.

Poznámky opravujícího.

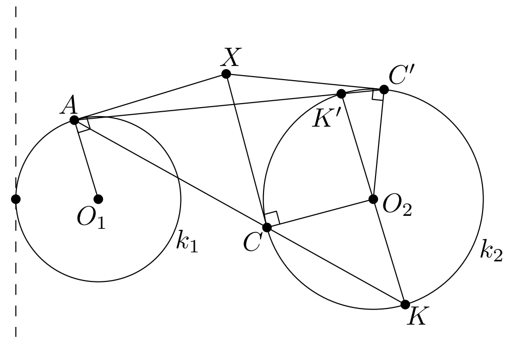
Většina správných řešení se až na technické detaily podobala vzorovému. Dva další řešitelé dokonce nějaké vhodné polynomy přímo zkonstruovali a posléze ukázali, že jimi poskytované zobrazení je opravdu prosté (v závislosti na zvoleném polynomu takové řešení mohlo být celkem pracné). Několik dalších řešitelů se ještě snažilo využít jednoznačný zápis v pozičních soustavách. Pomocí něj se také šlo dostat k cíli (celkem trikovým způsobem), což se ale nikomu úplně nepovedlo. *(Kuba Löwit)*

Úloha G4. *V rovině leží vně sebe kružnice k_1 a k_2. Jejich společné vnitřní tečny (myšlené jako úsečky s koncovými body na k_1 a k_2) nazvěme s_1 a s_2. Bod X leží na spojnici středů s_1 a s_2. Tečny z X ke k_1, resp. ke k_2, se jí dotýkají v A a B, resp. v C a D, kde body jsou označeny tak, že úsečky AC a BD se kříží. Ukažte, že AC, BD, s_1 a s_2 procházejí všechny jedním bodem.*

Řešení. Průsečík vnitřních tečen je vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k_1 a k_2, tudíž stačí dokázat, že tento střed leží také na úsečkách AC, BD. Středy tečen s_1, s_2 zřejmě mají stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_2, a proto spojnice těchto středů je chordála kružnic k_1, k_2. Bod X má tedy stejnou mocnost ke k_1 a k_2. Platí $|XA|=|XB|=|XC|=|XD|$.

Zatím vynechme body B, D a uvažujme pouze A, C. Zafixujeme-li A, pak máme dvě možnosti, kde se bod C může nacházet. Tyto případy odlišujeme značením C a C' a každý vyšetříme zvlášť. Nechť K je průsečík přímky AC s k_2, který je různý od C. Využijeme-li faktu, že $\angle O_1AX=\angle O_2CX=90^\circ$ a trojúhelníky AXC a CO_2K jsou rovnoramenné, dostaneme:

$$\angle O_1AK=90^\circ-\angle XAC=90-\angle XCA=\angle O_2CK=\angle O_2KC=\angle O_2KA$$



Platí tedy $AO_1 \parallel KO_2$. Pro případ s C' analogicky uvažujme bod K' a dokážeme, že $AO_1 \parallel K'O_2$.

$$\angle O_1AK' = 90^\circ - \angle XAC' = 90 - \angle XC'A = \angle O_2C'K' = \angle O_2K'C' = 180^\circ - O_2K'A$$

V každém případě platí, že na AC leží střed stejnolehlosti (ještě nevíme jaký). Chceme, aby tento střed ležel uvnitř AC. Musí se tedy jednat o vnitřní střed stejnolehlosti, protože vnější střed by ležel nalevo od čárkované přímky. Totéž platí pro úsečku BD a důkaz je hotov.

Poznámky opravujícího. Úloha se dala vyřešit známým faktem o středu stejnolehlosti a jednoduchým úhlením. Jeden z rychlých a přímočarých postupů je uveden ve vzorovém řešení, ale se našly i jiné postupy, které zaměstnaly i Švrčkovy body, ale už bývaly zdlouhavější.

Chtěl bych pochválit řešitele, kteří dbali na zdůvodnění, proč se jedná o vnitřní střed stejnolehlosti a ne vnější. Vynechání této části jsem sice nepotrestal ztrátou bodů, ale v soutěžích může být rozbor relativních poloh bodů důležitý a bodově ohodnocen. *(Tonda)*

Úloha A4. *Pro kladná reálná a, b, c dokažte nerovnost*

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

Řešení. Řešení úlohy si rozdělíme do dvou kroků, jejichž složením zjevně dostaneme řešení úlohy:

Krok 1: $\sum_{cyc} \frac{2a}{\sqrt{3a+b}} \leq \sqrt{(a+b+c)\sum_{cyc} \frac{4a}{3a+b}}$
Ukážeme si hned dva způsoby, jak tuto nerovnost ukázat.
První možností je, že použijeme Cauchy-Schwartzovu nerovnost ve verzi

$$\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2} + \sqrt{x_3y_3} \leq \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})}$$

na trojice (a, b, c) a $\left(\frac{4a}{3a+b}, \frac{4b}{3b+c}, \frac{4c}{3c+a}\right)$. Tím dostaneme

$$\sum_{cyc} \frac{2a}{\sqrt{3a+b}} = \sum_{cyc} \sqrt{a}\sqrt{\frac{4a}{3a+b}} \leq \sqrt{(a+b+c)\sum_{cyc} \frac{4a}{3a+b}},$$

což jsme chtěli.

Druhou možností je upravit si požadovanou nerovnost na

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+b+c}\sqrt{\frac{4}{3a+b}} \leq \sqrt{\frac{\sum_{cyc} \frac{4a}{3a+b}}{a+b+c}}$$

a (s využitím toho, že odmocnina je konkávní funkce a že $\sum_{cyc} \frac{a}{a+b+c} = 1$) použít Jensenovu nerovnost:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+b+c}\sqrt{\frac{4}{3a+b}} \leq \sqrt{\sum_{cyc} \frac{a}{a+b+c}\frac{4}{3a+b}} = \sqrt{\frac{\sum_{cyc} \frac{4a}{3a+b}}{a+b+c}}.$$

Krok 2: $\sqrt{(a+b+c)\sum_{cyc} \frac{4a}{3a+b}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$
Místo tohoto samozřejmě budeme dokazovat ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{cyc} \frac{a}{3a+b} \leq \frac{3}{4}.$$

Jedna možnost, jak toto udělat, je všechno to roznásobit. Z toho po poškrtání stejných členů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$24abc \leq 3\sum_{cyc} a^2b + 5\sum_{cyc} ab^2,$$

o čemž si uvědomíme, že to je vlastně jenom AG nerovnost (pokud ti to není jasné, určitě doporučujeme si to rozmyslet). Ale tento postup je trošku fujky, takže si ukážeme pěknější.

Uvědomíme si, že platí

$$\frac{a}{3a+b} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{b}{3a+b}\right)$$

a pomocí tohoto vztahu (a jeho cyklických obměn) je naše dokazovaná nerovnost ekvivalentní s

$$\sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

Ale toto už je jen další jednoduchý Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} = \sum_{cyc} \frac{b^2}{3ab+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} a^2 + 3\sum_{cyc} ab} =$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + \sum_{cyc} ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2} = \frac{3}{4},$$

kde poslední použitá nerovnost (tj. $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$) je ekvivalentní očividně platné nerovnosti $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

Poznámky opravujícího.

Naprostá většina řešení, která přišla, obdržela plný počet bodů.

Ten odhad uprostřed může vypadat trikově a náhodně, ale na první krok řešení se ve skutečnosti dá přijít vcelku jednoduše. Jedno z „pravidel nerovností“ zní, že první, co chcete s nerovností udělat, obvykle je zbavit se rozdrolených odmocnin (protože odmocniny jsou zlo). Typickými způsoby jak z více odmocnin udělat jednu je buď nějaká verze CS, nebo Jensen. Oba dva přístupy celkem přímočaře (tj. po chvíli hraní si „aby to vyšlo ňák hezky“) daly odhad prvního kroku.

Druhý krok sice není úplně jednoduchý, pokud to chcete dělat rochu hezky (ačkoliv i to je vlastně jen známá metoda - všechny podobné zlomky chci převést na tu stranu, ze které můžu použít CS zlomkobijce a pak ho jen použiju tak, aby to vyšlo nějak dobře), ale roznásobit tři takto jednoduché zlomky a dobít nerovnost AGčkem by měl být schopný pravděpodobně každý, kdo to s iKSkem myslí vážně :) *(Rado Švarc)*

Úloha C4. *Venca a Kuba našli krabičku s $n > 2$ sirkami a rozhodli se, že si zahrají hru. Na začátku Kuba z krabičky odebere několik sirek (alespoň jednu, ale ne všechny). Poté se střídají v tazích a v každém tahu musí hráč odebrat několik sirek z krabičky, přičemž vždy musí odebrat alespoň jednu sirku a maximálně dvakrát tolik sirek, kolik bylo z krabičky odebráno v předchozím tahu. Vyhraje ten, kdo odebere poslední sirku. Pro jaká n vyhraje Venca (za předpokladu, že oba hrají optimálně)?*

Řešení. Fibonacciho čísla jsou posloupnost F_n daná předpisem $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 4$. Povšimněme si, že je tato posloupnost od indexu 2 ostře rostoucí.

Nejprve dokážeme, že pokud je počet sirek roven Fibonacciho číslu, pak vyhraje Venca, a to dokonce tak, že v každém tahu je počet sirek odebraných Vencou nějaké Fibonacciho číslo.

Toto tvrzení dokážeme indukcí.

Začneme s dvěmi sirkami (F_3), zadání se sice zajímá až pro počty větší než dva, ale není důvod se takto omezovat. Kuba musí odebrat jednu sirku, Venca následně taky odebere jednu sirku (Fibonacciho číslo) a vyhraje.

Pokud jsou na hromádce tři sirky (F_4), může Kuba odebrat 1 nebo 2 sirky, na což Venca odebere 2 nebo 1 sirku (Fibonacciho čísla) a vyhraje.

Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro Fibonacciho čísla F_{n-2}, F_{n-1}, kde $n \geq 5$, a dokážeme jej pro $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Rozdělíme Vencovu hru na tři případy podle Kubova prvního tahu.

(a) Kuba odebere F_{n-2}, Venca tak může odebrat zbylých F_{n-1} (Fibonacciho číslo) a vyhraje. Platí totiž $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} < 2F_{n-2}$.

(b) Kuba odebere více než F_{n-2} sirek, tedy na hromádce zbude méně než F_{n-1} sirek. V tom případě Venca hraje podle strategie pro F_{n-1} sirek, jako by tam F_{n-2} z Kubou odebraných sirek vůbec nebylo. V tomto případě sice může Venca ve svém prvním tahu odebrat až o $2F_{n-2}$ sirek víc, ale tuto možnost nevyužije.

(c) Kuba odebere méně než F_{n-2} sirek. Pak si Venca z počátku odmyslí F_{n-1} sirek z hromádky, a hraje podle strategie pro F_{n-2} sirek. Poslední sirku odebere Venca, tedy Kuba do té doby nemůže sáhnout do odložených F_{n-1} sirek. Tato podhra na F_{n-2} sirkách skončí tahem Vency, který odebere ve svém posledním tahu nejvýše F_{n-3} sirek. Kuba nyní nemůže odebrat všechny sirky, protože $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} > 2F_{n-3}$. Venca proto může pokračovat podle strategie pro F_{n-1} sirek a vyhrát celou hru.

Nyní už snadno ukážeme, že když počet sirek k není Fibonacciho číslem, vyhrává Kuba. Uvažme kterékoli Fibonacciho číslo $F_n > k$ a představme si, že byl již odehrán jeden tah z F_n sirek na k sirek. Víme, že druhý hráč, tedy v tomto případě Kuba, má vyhrávající strategii. Může tak podle ní pokračovat. Jediný nepovolený tah pro Kubu je nyní odebrat všechny sirky, avšak víme, že tento tah Kubovi strategie nedoporučí, protože naše strategie odebírá v každém tahu Fibonacciho číslo a to k není.

Venca tedy vyhraje pouze pro Fibonacciho čísla (dle zadání větší než 2). V ostatních případech vyhrává Kuba.

Poznámky opravujícího. Řešitelé, kteří si všimli Fibonacciho posloupnosti už úlohu typicky nějak (někdy i docela pracně) ubili. Pro nalezení správného paternu je vhodné si psát vyhrávající a prohrávající strategie, avšak v této hře je třeba myslet na to, co se vlastně myslí pozicí. Pozice ve hře není dána jenom počtem sirek k, který zbývá, ale taky počtem sirek l, které smí být v dalším tahu odebrány. Čím vyšší je l, tím spíš bude pozice vyhrávající, takže když jste se chtěli vyhnout dvourozměrnému rozebírání, stačilo pro každé k spočítat nejmenší l, pro které je pozice vyhrávající. Takto dokázali někteří řešitelé prozkoušet počty sirek až do stovky.

(Mirek Olšák)