

Zadanie 3. série

Termín odoslania: 22. septembra 2014

Adresa: KMS – iKS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha A3. Nájďte všetky dvojice funkcií $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(x) + f(y) + f(x)f(y) = g(x)g(y)$$

Úloha G3. Je daný 5-uholník $ABCDE$, v ktorom platí, že obsahy trojuholníkov ABC , BCD , CDE , DEA , EAB sú rovnaké. Dokážte, že vnútri 5-uholníka existuje bod P taký, že obsahy trojuholníkov ABP , BCP , CDP , DEP , EAP sú rovnaké.

Úloha N3. Nájďte všetky dvojice prirodzených čísel (m, n) také, že platí:

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1$$

Úloha C3. V rovine je daných konečne veľa pásov¹ so súčtom širok X a kruh s polomerom 1. Dokážte, že ak $X = 7$, tak pásy vieme posunúť tak, aby pokryli celý kruh.
Bonus: Nájďte, čo najmenšiu hodnotu X pre ktorú to viete dokázať.

¹pás je časť roviny ohraničená dvoma rovnobežkami