

Zadanie 6. série

Termín odoslania: 27. januára 2014

Adresa: KMS – iKS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha A6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ktoré spĺňajú nasledovné podmienky:

- Pre každé x platí $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$.
- Pre každé x platí $f(-x) = f(x - 1)$.
- Ak $1 < x < y$, tak potom $f(x) < f(y)$.

Úloha N6. Nájdite všetky prirodzené čísla k také, že súčin prvých k nepárnych prvočísel sa dá zapísať v tvare $a^b + 1$, kde a, b sú prirodzené čísla, pričom $b > 1$.

Úloha G6. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$ s kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode E . Označme P bod na strane AD rôzny od A taký, že $EP = EC$. Kružnica opísaná trojuholníku BCD pretína stranu AD v bode Q , ktorý je rôzny od A . Kružnica prechádzajúca cez A , ktorá sa dotýka EP v bode P , pretína úsečku AC v bode R . Ak B, Q, R sú kolineárne, tak ukážte, že $|\sphericalangle BCD| = 90^\circ$.

Úloha C6. V každom vrchole pravidelného n uholníka ($n \geq 3$) je položená minca. V každom ťahu si vyberieme nejakú stranu, a vymeníme 2 mince, ktoré ležia vo vrcholoch vybranej strany. Urobíme niekoľko takých ťahov, až nakoniec každá dvojica mincí bude vymenená práve raz. Dokážte, že nejaká strana nebola vybraná (teda že sa nevymieňali mince v jej vrcholoch).